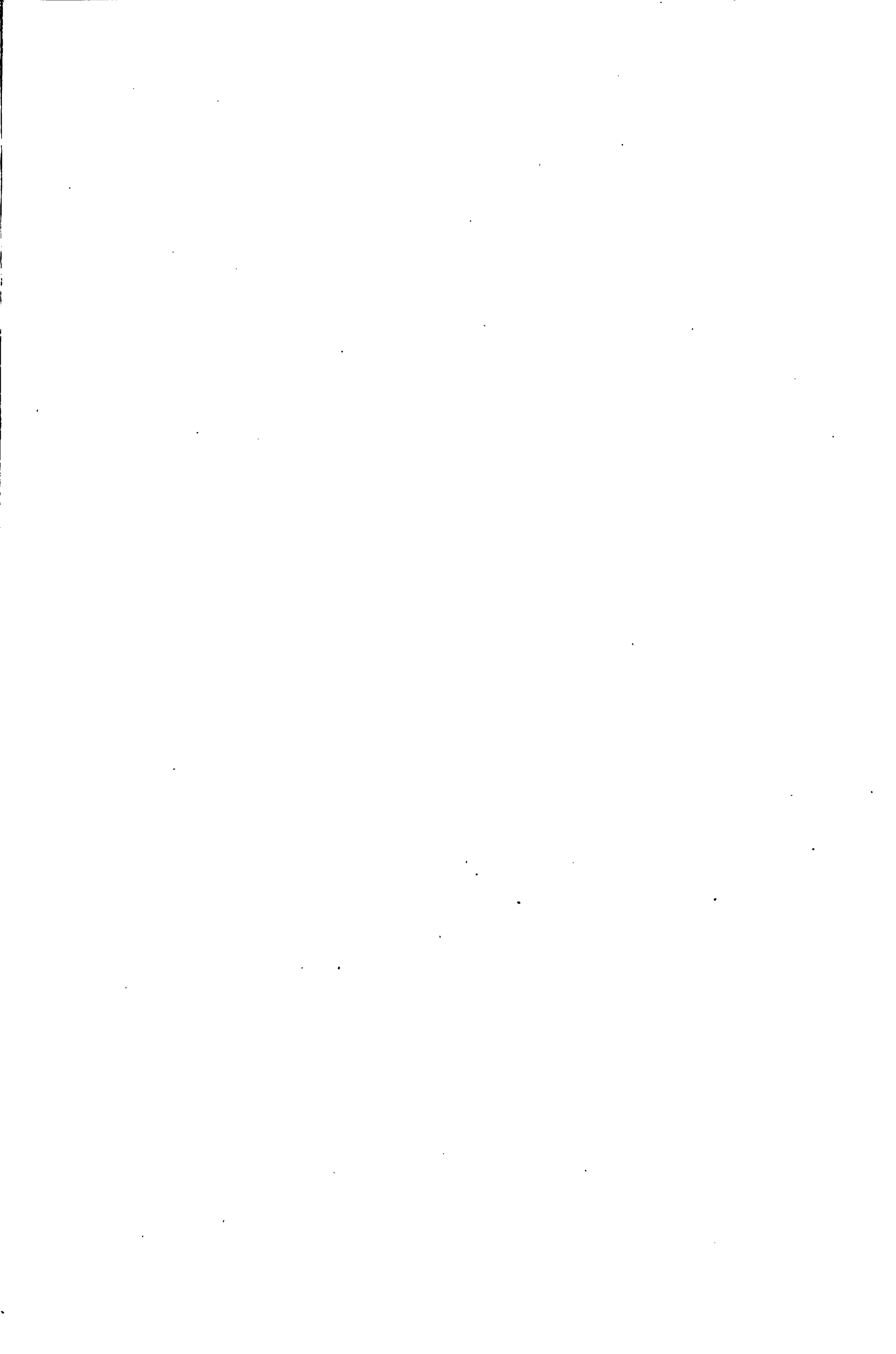




Übersicht über die Theorie der Abelschen Funktionen zweier Variabeln.

Inaugural-Dissertation,

der hohen Philosophischen Fakultät der Universität Marburg

zur

Erlangung der Doktorwürde

eingereicht

von

Friedrich Nölke

aus Bremen.

Marburg,

1903.

Von der Fakultät als Dissertation angenommen
am 12. Juni 1903.
Referent: Prof. Dr. Hensel.

Die Abelschen Funktionen zweier Variabeln sind bereits von mehreren Mathematikern zum Gegenstande ihrer Untersuchung gemacht worden. Die Theorie dieser Funktionen ist zuerst in ziemlich umständlicher Weise von Göpel und Rosenhain und später übersichtlicher von Weber aufgestellt. Thomae, Frobenius, Schottky u. a. haben sie dann an einzelnen Punkten weiter ausgebaut. Für den grösseren Teil unserer Arbeit nehmen wir daher die Eigenschaft der Neuheit nicht in Anspruch. Doch da es aus der Theorie der elliptischen Funktionen, wo die Weierstrassische Behandlungsweise die ältere Jacobische fast ganz verdrängt hat, bekannt ist, welche Bedeutung die methodische Behandlung für die Übersichtlichkeit der Theorie besitzt, so wird auch in unserem Falle eine Wiederholung des schon Bekannten in möglichst vereinfachter Form nicht überflüssig erscheinen. Die Vereinfachung wird besonders durch Benutzung der von Herrn Prof. Schottky eingeführten Indicesbezeichnung erreicht. Die aus ihr sich ergebende Bestimmung der in den Gleichungen auftretenden Vorzeichen, sowie die Darstellung von log ϑ durch ein Doppelintegral wird vielleicht nicht ohne Interesse sein.

---

§ 1.

Die Thetafunktionen zweier Variabeln.

Als Thetafunktion zweier Variabeln bezeichnen wir die Funktion

1. $$\vartheta(v, v'; \mu, \mu'; \nu, \nu') = \sum_{n, n'} e^{\pi i g(v, v'; n, n')};$$

$$g(v, v'; n, n') = \tau_{11}(n+\nu)^2 + 2\tau_{12}(n+\nu)(n'+\nu') + \tau_{22}(n'+\nu')^2 + 2(v+\mu)(n+\nu) + 2(v'+\mu')(n'+\nu').$$

v und v' sind die Variabeln; die Grössen τ, μ, ν sind Konstanten. Die Summe ist über alle ganzen positiven und negativen Zahlen

n, n' zu erstrecken. Bezeichnen wir die imaginären Ordinaten der Grössen τ mit τ', so ist die Summe für alle Werte von v, v' konvergent, wenn die Bedingungen

2. $$\tau_{11}' > 0; \ \tau_{22}' > 0; \ \tau_{11}'\tau_{22}' - \tau_{12}'^2 > 0$$

erfüllt sind. Der Kürze wegen sollen im folgenden die Grössen v, v'; μ, μ'; ν, ν' mit dem einen Buchstaben v, μ, ν bezeichnet werden.

Aus 1. geht unmittelbar hervor, dass

3. $$\vartheta(-v;\ \mu, \nu) = \vartheta(v;\ -\mu, -\nu)$$

ist, ausserdem, dass, wenn man μ, ν um ganze Zahlen p, q vermehrt, die Gleichung besteht

4. $$\vartheta(v;\ \mu+p,\ \nu+q) = e^{2\pi i \Sigma p\nu}.\vartheta(v;\ \mu, \nu).$$

Setzt man für μ, ν Hälften ganzer Zahlen, $\mu = \frac{\delta}{2}$, $\nu = \frac{\varepsilon}{2}$, so folgt aus 3. und 4.

$$\vartheta\left(-v;\ \frac{\delta}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right) = (-1)^{\Sigma\delta\varepsilon}.\vartheta\left(v;\ \frac{\delta}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Die Thetafunktion ist demnach gerade oder ungerade, je nachdem $\Sigma\delta\varepsilon$ gerade oder ungerade ist. Nach 4. genügt es, für δ, ε die Zahlen 0 oder 1 zu setzen.

Vermehrt man μ, ν um beliebige Zahlen μ_1, ν_1, und schreibt

5. $$\begin{cases} 2\tilde{\omega} = \nu_1\tau_{11} + \nu_1'\tau_{12} + \mu_1, \\ 2\tilde{\omega}' = \nu_1\tau_{12} + \nu_1'\tau_{22} + \mu_1', \end{cases}$$

so erhält man aus 1.

6. $$e^{\Sigma\pi i[2\nu_1(v+\tilde{\omega}) + \mu_1\nu_1]}.\vartheta(v+2\tilde{\omega};\ \mu, \nu) = e^{-2\pi i \Sigma\mu\nu_1}.\vartheta(v;\ \mu+\mu_1;\ \nu+\nu_1).$$

Setzt man für μ_1, ν_1 ganze Zahlen p, q, so ergibt sich hieraus, wenn man 4. beachtet,

7. $$e^{\Sigma\pi i[2q(v+\omega)+p.q]}\vartheta(v+2\omega;\ \mu, \nu) = e^{2\pi i \Sigma(p\nu - q\mu)}.\vartheta(v;\ \mu, \nu).$$

Die Thetafunktion ist also insofern periodisch, als sie bei Vermehrung der Argumente v, v' um die Grössen

8. $$\begin{cases} 2\omega = p + q\tau_{11} + q'\tau_{12}, \\ 2\omega' = p' + q\tau_{12} + q'\tau_{22}, \end{cases}$$

abgesehen von einem Exponentialfaktor, dessen Exponent in v linear ist, in sich selbst übergeht. Die Grössen 2ω, $2\omega'$ sollen als Perioden bezeichnet werden.

Wir beschäftigen uns im folgenden nur mit den geraden und ungeraden Thetafunktionen, setzen also für μ, ν die Grössen $\frac{\delta}{2}, \frac{\varepsilon}{2}$. Es gibt deren im ganzen $4^2 = 16$. Aus 6. erkennt man, dass sie

ineinander übergehen, wenn man das Argument um eine halbe Periode vermehrt. Die bestimmte Kombination der δ, ε, welche bei einer beliebigen der 16 Thetafunktionen vorliegt, heisst die Charakteristik dieser Funktion. Wir denken sie uns durch Indices bezeichnet. Zu jedem Index a gehört dann eine bestimmte Funktion ϑ_a. Schreibt man

$$2\omega_a = \delta_a + \varepsilon_a \tau_{11} + \varepsilon_a' \tau_{12},$$
$$2\omega_a' = \delta_a' + \varepsilon_a \tau_{12} + \varepsilon_a' \tau_{22},$$

so entspricht jedem Index a auch eine bestimmte Periode $2\omega_a$, $2\omega_a'$. Vermehrt man das Argument von ϑ_a um die halbe Periode ω_b, so erhält man nach 6.

$$9. \quad \vartheta\left(v+\omega_b;\ \frac{\delta_a}{2}, \frac{\varepsilon_a}{2}\right) = E_b(v) \,.\, i^{-\Sigma \delta_a \varepsilon_b} \,.\, \vartheta\left(v;\ \frac{\delta_a+\delta_b}{2}, \frac{\varepsilon_a+\varepsilon_b}{2}\right).$$

$E_b(v)$ bedeutet hier die Grösse

$$e^{-\Sigma \pi i \left[\varepsilon_b (v + \frac{1}{2}\omega_b) + \frac{1}{4}\delta_b \,.\, \varepsilon_b\right]}.$$

Definiert man nun neue Grössen δ_{ab}, ε_{ab}, die auch entweder den Wert 0 oder 1 haben, durch die Kongruenzen

$$\delta_a + \delta_b \equiv \delta_{ab} \text{ (mod. 2)};\quad \varepsilon_a + \varepsilon_b \equiv \varepsilon_{ab} \text{ (mod. 2)},$$

und beachtet die von Herrn Prof. Schottky angegebene [Crelle, Band 102; Seite 309], leicht zu verifizierende Kongruenz

$$\frac{\delta_a + \delta_b - \delta_{ab}}{2} \equiv \delta_a \,.\, \delta_b \text{ (mod. 2)},$$

aus welcher

$$10. \quad \delta_a + \delta_b \equiv \delta_{ab} + 2\,\delta_a \,.\, \delta_b \text{ (mod. 4)}$$

sich ergibt, so erhält man aus 9., wenn man 4. beachtet und $\vartheta_a(v)$ für $\vartheta\left(v;\ \frac{\delta_a}{2}, \frac{\varepsilon_a}{2}\right)$ schreibt,

$$11. \quad \vartheta_a(v+\omega_b) = E_b(v) \,.\, i^{-\Sigma \delta_a \varepsilon_b} \,.\, (-1)^{\Sigma \varepsilon_{ab} \,.\, \delta_a \,.\, \delta_b} \,.\, \vartheta_{ab}(v).$$

Diese Gleichung ist wichtig für die im § 2 folgende Bestimmung der Vorzeichen der Thetarelationen. Dividiert man die Relationen durch eines ihrer Glieder, so kann man sie auch als Gleichungen zwischen Abelschen Funktionen der Form

$$\varphi(v) = \frac{\vartheta_{ak} \,.\, \vartheta_{al}}{\vartheta_a \,.\, \vartheta_{akl}}$$

betrachten. Um die Vorzeichen der Thetarelationen zu erhalten, hat man daher zu untersuchen, in welcher Weise sich $\varphi(v)$ bei der Vermehrung des Argumentes um eine halbe Periode ändert.

Vermehrt man v um die halbe Periode ω_m, so geht nach 11. $\varphi(v)$ über in

$$\varphi(v+\omega_m)=\eta\cdot\frac{\vartheta_{akm}\cdot\vartheta_{alm}}{\vartheta_{am}\cdot\vartheta_{aklm}},$$

wo η den Faktor $i^h.(-1)^{h'}$,

$$h=\sum\varepsilon_m(\delta_a+\delta_{akl}-\delta_{ak}-\delta_{al}),$$
$$h'=\sum\delta_m(\varepsilon_{akm}\delta_{ak}+\varepsilon_{alm}\delta_{al}-\varepsilon_{am}\delta_a-\varepsilon_{aklm}\delta_{akl}),$$

bedeutet. Nun ist nach 10.

$$\delta_a+\delta_{akl}\equiv\delta_{kl}+2\delta_a\,.\,\delta_{akl}\ (\text{mod. }4),$$
$$\delta_{ak}+\delta_{al}\equiv\delta_{kl}+2\delta_{ak}\,.\,\delta_{al}\ (\text{mod. }4),$$

folglich

$$h\equiv 2\sum\varepsilon_m(\delta_a\delta_{akl}-\delta_{ak}\delta_{al})\ (\text{mod. }4).$$

Da man h' und $\frac{1}{2}h$ nur mod. 2 zu betrachten braucht, so kann man setzen

$$\delta_{ak}\equiv\delta_a+\delta_k;\quad \delta_{akl}\equiv\delta_a+\delta_k+\delta_l;\ \text{etc.}$$

Dann erhält man nach einer einfachen Reduktion $\eta=(-1)^H$,

12. $$H=\sum(\varepsilon_k\delta_l\delta_m+\varepsilon_l\delta_m\delta_k+\varepsilon_m\delta_k\delta_l).$$

Das Vorzeichen η ist demnach von a ganz unabhängig und symmetrisch in k, l, m. Bezeichnet man es mit (k, l, m), so erkennt man sofort, dass die Gleichung

13. $$(k, l, m)\,(r, l, m)=(kr, l, m)$$

besteht. Sind zwei Indices, z. B. k und l, einander gleich, so erhält man, da $\delta_k^2\equiv\delta_k$ (mod. 2) ist,

14. $$(k, k, m)=(-1)^{\Sigma\varepsilon_m\delta_k}.$$

Ist $m=kl$, so ergibt sich

15. $$(k, l, kl)=(-1)^{\Sigma(\varepsilon_k\delta_l+\varepsilon_l\delta_k)}.$$

Vermehrt man v um ω_{kl}, so geht $\varphi(v)$ in sich selbst über; folglich ist

$$\varphi(v+\omega_{kl})=(k, l, kl)\,\varphi(v).$$

Setzt man $v=-\frac{1}{2}\omega_{kl}$, so ist

$$\varphi(\tfrac{1}{2}\omega_{kl})=(k, l, kl)\,\varphi(-\tfrac{1}{2}\omega_{kl}).$$

Da $\varphi(\frac{1}{2}\omega_{kl})$ nicht gleich 0 sein kann, so folgt, dass (k, l, kl) gleich $+1$ oder gleich -1 ist, je nachdem $\varphi(v)$ eine gerade oder eine ungerade Abelsche Funktion bezeichnet.

Die Indices der Thetafunktionen wählen wir nun in der folgenden Weise. Es gibt 6 ungerade Thetafunktionen. Ihre Charakteristiken sind:

δ	ε	δ'	ε'
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Wir bezeichnen sie in einer beliebigen Reihenfolge mit 1, 2, 3, 4, 5, 6. Bilden wir $\delta_{\alpha\beta\gamma} \equiv \delta_\alpha + \delta_\beta + \delta_\gamma$; $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \equiv \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma$, wo α, β, γ irgend 3 der 6 Zahlen $1, 2 \ldots 6$ bedeuten, so ist $\sum \delta_{\alpha\beta\gamma} . \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ stets gerade; folglich ist $\vartheta_{\alpha\beta\gamma}$ eine gerade Funktion. Unter den 20 Kombinationen der 6 Indices zu je dreien kommt jede gerade Charakteristik zweimal vor, und zwar ist $\vartheta_{\alpha\beta\gamma} = \vartheta_{\varkappa\lambda\mu}$, wo $\varkappa$, λ, μ die drei von α, β, γ verschiedenen Zahlen der Reihe $1, 2 \ldots 6$ bedeuten. Von der Richtigkeit dieser Behauptungen überzeugt man sich leicht an der Hand der vorhergehenden Tabelle. Es ist also auch für die geraden Thetafunktionen auf diese Weise eine Bezeichnung durch Indices gewonnen. Da die einzelnen Thetafunktionen durch Vermehrung des Argumentes um halbe Perioden ineinander übergehen, so ordnet man den Perioden am besten zweigliedrige Indices zu, und zwar in der Weise, dass durch die halbe Periode $\omega_{\varkappa\lambda}$ $\vartheta_\varkappa$ in ϑ_λ, und ϑ_α in $\vartheta_{\alpha\varkappa\lambda}$ übergeht. Es gibt 15 inkongruente halbe Perioden. Da für $v = 0$ die ungeraden Thetafunktionen verschwinden, und durch Vermehrung des Argumentes um die halbe Periode $\omega_{\alpha\beta}$ ϑ_α in ϑ_β übergeht, so ist auch $\vartheta_\alpha(\omega_{\alpha\beta}) = 0$, und ebenso $\vartheta_\alpha(\omega_{\alpha\gamma})$, $\vartheta(\omega_{\alpha\varkappa})$, $\vartheta(\omega_{\alpha\lambda})$, $\vartheta(\omega_{\alpha\mu})$. $\vartheta_{\alpha\beta\gamma}$ wird $=0$ für die Werte $\omega_{\alpha\beta}$, $\omega_{\alpha\gamma}$, $\omega_{\beta\gamma}$, $\omega_{\varkappa\lambda}$, $\omega_{\varkappa\mu}$, $\omega_{\lambda\mu}$.

Setzt man

$$\varphi(v) = \frac{\vartheta_\alpha . \vartheta_\beta}{\vartheta_\gamma . \vartheta_{\alpha\beta\gamma}},$$

so ist $k = \alpha\gamma$, $l = \beta\gamma$, $kl = \alpha\beta$. Da $\varphi(v)$ eine ungerade Funktion bezeichnet, so ist nach dem früheren

16. $$(\alpha\gamma,\ \beta\gamma,\ \alpha\beta) = -1.$$

Nun ist nach 15.

$$(\alpha\gamma,\ \beta\gamma,\ \alpha\beta) = (-1)^{\sum(\varepsilon_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\gamma} + \varepsilon_{\beta\gamma}\delta_{\alpha\gamma})}$$

oder, wenn man $\sum(\varepsilon_\alpha \delta_\beta + \varepsilon_\beta \delta_\alpha) = [\alpha, \beta]$ setzt,

$$(\alpha\gamma,\ \beta\gamma,\ \alpha\beta) = (-1)^{[\alpha,\beta] + [\beta,\gamma] + [\gamma,\alpha]}.$$

Da das Vorzeichen nach 16. den Wert -1 hat, so folgt, dass man

6 Vorzeichen $\varrho_1, \varrho_2 \ldots \varrho_6$ so bestimmen kann, dass die Gleichung

17. $$(-1)^{\Sigma(\varepsilon_\alpha \delta_\beta + \varepsilon_\beta \delta_\alpha)} = -\varrho_\alpha \cdot \varrho_\beta$$

besteht. Eines der Vorzeichen bleibt dabei willkürlich.

Über das System der ungeraden Charakteristiken ist noch folgendes zu bemerken:

I. Die Summen $\sum_{\alpha=1}^{6} \delta_\alpha \varepsilon_\alpha$, $\sum_{\alpha=1}^{6} \delta_\alpha' \varepsilon_\alpha'$ sind $\equiv 1$ (mod. 2).

II. Da $\sum_{\alpha=1}^{6} \delta_\alpha \equiv 0$ (mod. 4) ist, so ist das Quadrat dieser Summe durch 4 teilbar. Subtrahiert man von demselben die durch 4 teilbare Zahl $\sum_{\alpha=1}^{6} \delta_\alpha^2$, so folgt, dass die Summe $2 \sum_{\alpha,\beta} \delta_\alpha \delta_\beta (\alpha \gtrless \beta)$ ebenfalls durch 4 teilbar ist. Demnach ist $\sum_{\alpha,\beta} \delta_\alpha \cdot \delta_\beta \equiv 0$ (mod. 2). Dasselbe gilt von $\sum_{\alpha,\beta} \delta_\alpha' \delta_\beta'$.

III. Die Summen $\sum_1^6 \delta_\alpha$, $\sum_1^6 \delta_\alpha'$, $\sum_1^6 \varepsilon_\alpha$, $\sum_1^6 \varepsilon_\alpha'$ sind gerade Zahlen.

Hieraus folgt, dass $\delta_\alpha \equiv \delta_{\beta\gamma\varkappa\lambda\mu}$; $\delta_{\alpha\beta} \equiv \delta_{\gamma\varkappa\lambda\mu}$; $\delta_{\alpha\beta\gamma} \equiv \delta_{\varkappa\lambda\mu}$ (mod. 2) ist. Für δ', ε, ε' gelten dieselben Kongruenzen. Mithin bestehen zwischen den Indices die Gleichungen $(\alpha) = (\beta\gamma\varkappa\lambda\mu)$; $(\alpha\beta) = (\gamma\varkappa\lambda\mu)$; $(\alpha\beta\gamma) = (\varkappa\lambda\mu)$.

---

§ 2.

Die Relationen zwischen den Thetafunktionen.

Die 16 Funktionen ϑ_α, $\vartheta_{\alpha\beta\gamma}$ sind durch ihre Periodeneigenschaften bis auf einen konstanten Faktor bestimmt, wenn man hinzufügt, dass sie ganze transscendente Funktionen der beiden Argumente sind.

Bildet man dagegen die Quadrate der Thetafunktionen, oder die Produkte zweier verschiedener Thetafunktionen und entwickelt diese Ausdrücke nach Potenzen der Grössen $e^{\pi i v}$, $e^{\pi i v'}$, so erkennt man, dass es in beiden Fällen vier linear unabhängige, transscendente ganze Funktionen gibt, welche denselben Periodengleichungen genügen. Hieraus folgt:

1. Dass sich die Quadrate der 16 Thetafunktionen durch 4 unter ihnen homogen und linear ausdrücken lassen. Zwischen 5

Thetaquadraten besteht also eine homogene, lineare Gleichung. Wählt man 4 Quadrate ungerader Thetafunktionen und ein Quadrat einer geraden Thetafunktion, so folgt, da die Quadrate der ungeraden Funktionen mit dem Argumente verschwinden, dass schon zwischen 4 Thetaquadraten eine homogene lineare Gleichung besteht. Ferner ergibt sich, dass $\vartheta_a(v+w).\vartheta_a(v-w)$ sich durch 4 Thetaquadrate linear und homogen ausdrücken lässt.

2. Dass die 8 Funktionen, die zu derselben Periode $\varkappa\lambda$ gehören,

a) $\vartheta_\alpha . \vartheta_{\alpha\varkappa\lambda}$; $\vartheta_\beta . \vartheta_{\beta\varkappa\lambda}$; $\vartheta_\gamma . \vartheta_{\gamma\varkappa\lambda}$; $\vartheta_\mu . \vartheta_{\mu\varkappa\lambda}$;

b) $\vartheta_{\alpha\mu\varkappa} . \vartheta_{\alpha\mu\lambda}$; $\vartheta_{\beta\mu\varkappa} . \vartheta_{\beta\mu\lambda}$; $\vartheta_{\gamma\mu\varkappa} . \vartheta_{\gamma\mu\lambda}$; $\vartheta_\varkappa . \vartheta_\lambda$

durch 4 unter ihnen linear ausgedrückt werden können. Da aber die ersten 4 Funktionen (a) ungerade, die 4 letzten (b) gerade sind, so besteht schon zwischen je drei Funktionen der ersten Reihe, und ebenso zwischen je dreien der zweiten Reihe eine homogene lineare Gleichung. Die Ausdrücke

$$\vartheta_\varkappa \frac{\partial \vartheta_\lambda}{\partial v} - \vartheta_\lambda \frac{\partial \vartheta_\varkappa}{\partial v}; \quad \vartheta_\varkappa \frac{\partial \vartheta_\lambda}{\partial v'} - \vartheta_\lambda \frac{\partial \vartheta_\varkappa}{\partial v'}$$

haben dieselben Periodengleichungen wie $\vartheta_\varkappa . \vartheta_\lambda$. Ausserdem sind sie ungerade; sie lassen sich also durch $\vartheta_\alpha \vartheta_{\alpha\varkappa\lambda}$, $\vartheta_\beta \vartheta_{\beta\varkappa\lambda}$ ausdrücken.

Zunächst soll die Gleichung aufgestellt werden, welche zwischen den Funktionen

$$\vartheta_\alpha \vartheta_{\alpha\varkappa\lambda}, \quad \vartheta_\beta \vartheta_{\beta\varkappa\lambda}, \quad \vartheta_\gamma \vartheta_{\gamma\varkappa\lambda}$$

besteht. Es sei

1. $$A\vartheta_\alpha . \vartheta_{\alpha\varkappa\lambda} + B\vartheta_\beta . \vartheta_{\beta\varkappa\lambda} + C\vartheta_\gamma . \vartheta_{\gamma\varkappa\lambda} = 0.$$

Dividiert man diese Gleichung durch $\vartheta_\alpha . \vartheta_{\alpha\varkappa\lambda}$, vermehrt v um die halbe Periode $\omega_{\gamma\varkappa}$, multipliziert dann mit $\vartheta_{\alpha\gamma\varkappa} . \vartheta_{\alpha\gamma\lambda}$ und setzt das Argument gleich 0, so erhält man

$$Ac_{\alpha\gamma\varkappa} . c_{\alpha\gamma\lambda} + (\alpha\beta, \alpha\beta\varkappa\lambda, \gamma\varkappa)\, B\, c_{\beta\gamma\varkappa} . c_{\beta\gamma\lambda} = 0;$$

$c_{\alpha\gamma\varkappa}$, $c_{\alpha\gamma\lambda}$ etc. sind die Werte, welche $\vartheta_{\alpha\gamma\varkappa}$, $\vartheta_{\alpha\gamma\lambda}$ etc. für $v=0$ annehmen. Da $(\alpha\beta\varkappa\lambda) = (\gamma\mu)$ ist, so folgt

2. $$A\, c_{\alpha\gamma\varkappa}\, c_{\alpha\gamma\lambda} + (\alpha\beta, \gamma\mu, \gamma\varkappa)\, B\, c_{\beta\gamma\varkappa}\, c_{\beta\gamma\lambda} = 0.$$

Vermehrt man v um die halbe Periode $\omega_{\beta\varkappa}$, multipliziert mit $\vartheta_{\alpha\beta\varkappa}\vartheta_{\alpha\beta\lambda}$ und setzt $v=0$, so erhält man

3. $$A\, c_{\alpha\beta\varkappa} . c_{\alpha\beta\lambda} + (\alpha\gamma, \beta\mu, \beta\varkappa)\, C c_{\beta\gamma\varkappa} . c_{\beta\gamma\lambda} = 0.$$

Aus 2. und 3. folgt, dass man schreiben kann

4. $$\begin{cases} A = c_{\beta\gamma\varkappa} . c_{\beta\gamma\lambda} = c_{\alpha\varkappa\mu} . c_{\alpha\lambda\mu}, \\ B = -(\alpha\beta, \gamma\mu, \gamma\varkappa) . c_{\beta\varkappa\mu} . c_{\beta\lambda\mu}, \\ C = -(\alpha\gamma, \beta\mu, \beta\varkappa) . c_{\gamma\varkappa\mu} . c_{\gamma\lambda\mu}. \end{cases}$$

Wollte man diese Werte in 1. einsetzen, so würde die entstehende Gleichung unsymmetrisch werden. Es lassen sich aber die Vorzeichen $(\alpha\beta, \gamma\mu, \gamma\varkappa)$ und $(\alpha\gamma, \beta\mu, \beta\varkappa)$ in eine solche Form bringen, dass die Gleichung eine symmetrische Gestalt annimmt. Nach 12. § 1 ist

$$(\alpha\beta, \gamma\mu, \gamma\varkappa) = (-1)^H, \text{ wo}$$

5. $$H = \sum (\varepsilon_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\mu}\delta_{\gamma\varkappa} + \varepsilon_{\gamma\mu}\delta_{\gamma\varkappa}\delta_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\gamma\varkappa}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\mu}).$$

Nun ist $\delta_{\gamma\mu}.\delta_{\gamma\varkappa} \equiv (\delta_\gamma + \delta_\mu)(\delta_\gamma + \delta_\varkappa)$ (mod. 2), folglich, da $\delta_\gamma^2 \equiv \delta_\gamma$ ist,

$$\delta_{\gamma\mu}\delta_{\gamma\varkappa} \equiv \delta_\gamma + \delta_\gamma\delta_\varkappa + \delta_\gamma\delta_\mu + \delta_\varkappa\delta_\mu.$$

Aus dem, was am Schlusse des § 1 (II.) gesagt wurde, folgt

$$(\delta_\gamma\delta_\varkappa + \delta_\gamma\delta_\mu + \delta_\varkappa\delta_\mu) + (\delta_\alpha\delta_\beta + \delta_\alpha\delta_\lambda + \delta_\beta\delta_\lambda)$$
$$+ (\delta_\gamma + \delta_\varkappa + \delta_\mu)(\delta_\alpha + \delta_\beta + \delta_\lambda) \equiv 0 \text{ (mod. 2)}.$$

Da $\delta_\gamma + \delta_\varkappa + \delta_\mu \equiv \delta_\alpha + \delta_\beta + \delta_\lambda$ (mod. 2) ist, so ergibt sich also

$$\delta_{\gamma\mu}\delta_{\gamma\varkappa} \equiv \delta_\gamma + \delta_\alpha + \delta_\beta + \delta_\lambda + \delta_\alpha\delta_\beta + \delta_\alpha\delta_\lambda + \delta_\beta\delta_\lambda$$

oder

$$\delta_{\gamma\mu}\delta_{\gamma\varkappa} \equiv \delta_\gamma + \delta_\alpha + \delta_\beta + \delta_{\alpha\lambda}.\delta_{\beta\lambda}.$$

Mithin ist

$$\sum \varepsilon_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\mu}\delta_{\gamma\varkappa} \equiv \sum \varepsilon_{\alpha\beta}(\delta_\alpha + \delta_\beta + \delta_\gamma) + \sum \varepsilon_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\lambda}$$

oder, da $\sum \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\delta_{\alpha\beta\gamma} \equiv 0$ (mod. 2) ist,

6. $$\sum \varepsilon_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\mu}\delta_{\gamma\varkappa} \equiv \sum \varepsilon_\gamma(\delta_\alpha + \delta_\beta + \delta_\gamma) + \sum \varepsilon_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\lambda}.$$

Das Vorzeichen $(\alpha\beta, \alpha\lambda, \beta\lambda)$ hat den Wert -1; folglich ist nach 12. § 1

$$\sum \varepsilon_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\lambda} \equiv 1 + \sum \delta_{\alpha\beta}(\varepsilon_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\lambda} + \varepsilon_{\beta\lambda}\delta_{\alpha\lambda}).$$

Unter Berücksichtigung dieser Kongruenz ergibt sich aus 5. und 6.

$$H \equiv 1 + \sum \varepsilon_\gamma(\delta_\alpha + \delta_\beta + \delta_\gamma)$$
$$+ \sum \delta_{\alpha\beta}[\varepsilon_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\lambda} + \varepsilon_{\beta\lambda}\delta_{\alpha\lambda} + \varepsilon_{\gamma\mu}\delta_{\gamma\varkappa} + \varepsilon_{\gamma\varkappa}\delta_{\gamma\mu}].$$

Schreibt man $\delta_{\beta\lambda} \equiv \delta_{\gamma\varkappa} + \delta_{\alpha\mu}$; $\delta_{\alpha\lambda} \equiv \delta_{\gamma\varkappa} + \delta_{\beta\mu}$, so geht die in der zweiten Summe stehende Klammergrösse über in

$$\delta_{\gamma\varkappa}(\varepsilon_{\alpha\lambda} + \varepsilon_{\beta\lambda} + \varepsilon_{\gamma\mu}) + \varepsilon_{\alpha\lambda}\delta_{\alpha\mu} + \varepsilon_{\beta\lambda}\delta_{\beta\mu} + \varepsilon_{\gamma\varkappa}\delta_{\gamma\mu}$$

oder, da $\varepsilon_{\alpha\lambda} + \varepsilon_{\beta\lambda} + \varepsilon_{\gamma\mu} \equiv \varepsilon_{\varkappa\lambda}$ ist, in

$$\varepsilon_{\varkappa\lambda}\delta_{\gamma\varkappa} + \varepsilon_{\alpha\lambda}\delta_{\alpha\mu} + \varepsilon_{\beta\lambda}\delta_{\beta\mu} + \varepsilon_{\gamma\varkappa}\delta_{\gamma\mu}.$$

Schreibt man nun $\varepsilon_{\varkappa\lambda} \equiv \varepsilon_\varkappa + \varepsilon_\lambda$; $\varepsilon_{\alpha\lambda} \equiv \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\lambda$, etc., so erhält man

$$\varepsilon_\alpha\delta_{\alpha\mu} + \varepsilon_\beta\delta_{\beta\mu} + \varepsilon_\gamma\delta_{\gamma\mu} + \varepsilon_\varkappa(\delta_{\gamma\varkappa} + \delta_{\gamma\mu}) + \varepsilon_\lambda(\delta_{\gamma\varkappa} + \delta_{\alpha\mu} + \delta_{\beta\mu})$$
$$\equiv \varepsilon_\alpha\delta_{\alpha\mu} + \varepsilon_\beta\delta_{\beta\mu} + \varepsilon_\gamma\delta_{\gamma\mu} + \varepsilon_\varkappa\delta_{\varkappa\mu} + \varepsilon_\lambda\delta_{\lambda\mu}$$
$$\equiv \varepsilon_\alpha\delta_\alpha + \varepsilon_\beta\delta_\beta + \varepsilon_\gamma\delta_\gamma + \varepsilon_\varkappa\delta_\varkappa + \varepsilon_\lambda\delta_\lambda + (\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma + \varepsilon_\varkappa + \varepsilon_\lambda)\delta_\mu$$
$$\equiv \sum_{\alpha=1}^{6} \varepsilon_\alpha\delta_\alpha.$$

Diese Summe ist kongruent 1 (mod. 2), und mithin, da $\sum \varepsilon_\gamma \delta_\gamma \equiv 1$ (mod. 2) ist,

$$H \equiv \sum [\varepsilon_\gamma (\delta_\alpha + \delta_\beta) + \delta_\alpha + \delta_\beta].$$

Schreibt man

7. $$\varrho_\alpha . (-1)^{\Sigma(\varepsilon_\alpha \delta_\beta + \delta_\alpha + \delta_\beta)} = (\alpha \mid \beta),$$

so wird also

8. $$(\alpha\beta, \gamma\mu, \gamma\varkappa) = (\gamma \mid \alpha)(\gamma \mid \beta).$$

Das Zeichen $(\alpha \mid \beta)$ ist ein alternierendes. Denn da $\varrho_\alpha \varrho_\beta = -(-1)^{\Sigma(\varepsilon_\alpha \delta_\beta + \varepsilon_\beta \delta_\alpha)}$ ist, so erhält man $(\alpha \mid \beta)(\beta \mid \alpha) = -1$. Bildet man $\pi_\alpha = (\alpha \mid \beta)(\alpha \mid \gamma)(\alpha \mid \varkappa)(\alpha \mid \lambda)(\alpha \mid \mu)$, so ist nach 7.

$$\pi_\alpha = \varrho_\alpha^5 . (-1)^{\Sigma \varepsilon_\alpha (\delta_\beta + \delta_\gamma + \delta_\varkappa + \delta_\lambda + \delta_\mu) + 5\delta_\alpha + \delta_\beta + \delta_\gamma + \delta_\varkappa + \delta_\lambda + \delta_\mu},$$

9. $$\pi_\alpha = \varrho_\alpha . (-1)^{\Sigma \varepsilon_\alpha \delta_\alpha} = -\varrho_\alpha.$$

Das Vorzeichen ϱ_α lässt sich also durch ein Produkt alternierender ausdrücken. Aus 8. folgt $(\alpha\gamma, \beta\mu, \beta\varkappa) = (\beta \mid \alpha)(\beta \mid \gamma)$. Berücksichtigt man diese Werte und die Gleichungen 4. und 8., so geht die Gleichung 1. über in

10. $$\sum_{\alpha, \beta, \gamma} (\beta \mid \gamma) . c_{\alpha\varkappa\mu} . c_{\alpha\lambda\mu} . \vartheta_\alpha . \vartheta_{\alpha\varkappa\lambda} = 0.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $(\alpha \mid \beta)(\beta \mid \gamma)(\gamma \mid \alpha)$, so erhält man

11. $$\sum_{\alpha, \beta, \gamma} (\alpha \mid \beta)(\alpha \mid \gamma) . c_{\alpha\varkappa\mu} . c_{\alpha\lambda\mu} . \vartheta_\alpha . \vartheta_{\alpha\varkappa\lambda} = 0.$$

Dividiert man die letzte Gleichung durch $\vartheta_\mu . \vartheta_{\mu\varkappa\lambda}$, und vermehrt v um die halbe Periode $\omega_{\varkappa\mu}$, so tritt das Vorzeichen

$$(\alpha\mu, \alpha\mu\varkappa\lambda, \varkappa\mu) = (\alpha\mu, \beta\gamma, \varkappa\mu) = (\mu \mid \beta)(\mu \mid \gamma)$$

hinzu. Multipliziert man die Gleichung mit $(\mu \mid \alpha)(\mu \mid \beta)(\mu \mid \gamma)$, so ergibt sich also

12. $$\sum_{\alpha, \beta, \gamma} (\alpha \mid \beta)(\alpha \mid \gamma)(\alpha \mid \mu) . c_{\alpha\varkappa\mu} . c_{\alpha\lambda\mu} . \vartheta_{\alpha\varkappa\mu} . \vartheta_{\alpha\lambda\mu} = 0.$$

Dividiert man die Gleichung 10. durch $\vartheta_\gamma . \vartheta_{\gamma\varkappa\lambda}$ und vermehrt v um die halbe Periode $\omega_{\gamma\varkappa}$, so tritt bei dem ersten Gliede das Vorzeichen

$$(\alpha\gamma, \alpha\gamma\varkappa\lambda, \gamma\varkappa) = (\alpha\gamma, \beta\mu, \gamma\varkappa) = (\gamma \mid \beta)(\gamma \mid \mu)$$

hinzu. Das resultierende Vorzeichen ist also

$$(\gamma \mid \beta)(\gamma \mid \mu)(\beta \mid \gamma) = -(\gamma \mid \mu).$$

Das resultierende Vorzeichen des zweiten Gliedes ist

$$(\gamma \mid \alpha)(\gamma \mid \mu)(\gamma \mid \alpha) = +(\gamma \mid \mu).$$

Man erhält demnach die Gleichung

13. $$c_{\alpha\varkappa\mu} . c_{\alpha\lambda\mu} . \vartheta_{\alpha\gamma\varkappa} . \vartheta_{\alpha\gamma\lambda} - c_{\beta\varkappa\mu} . c_{\beta\lambda\mu} . \vartheta_{\beta\gamma\varkappa} . \vartheta_{\beta\gamma\lambda} = (\alpha \mid \beta)(\gamma \mid \mu) . c_{\gamma\varkappa\mu} . c_{\gamma\lambda\mu} . \vartheta_\varkappa . \vartheta_\lambda.$$

Wir stellen nunmehr die zwischen den Quadraten der Thetafunktionen bestehenden Relationen auf. Es sei

14. $$\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\varkappa} A_\alpha \vartheta_\alpha^2 = 0.$$

Dividiert man die Gleichung durch ϑ_α^2, vermehrt v um die halbe Periode $\omega_{\gamma\varkappa}$, multipliziert mit $\vartheta^2_{\alpha\gamma\varkappa}$ und setzt $v=0$, so entsteht

$$A_\alpha . c^2_{\alpha\gamma\varkappa} + (\alpha\beta, \alpha\beta, \gamma\varkappa) . A_\beta . c^2_{\beta\gamma\varkappa} = 0.$$

Nun ist $(\alpha\beta, \alpha\lambda, \gamma\varkappa) = (\alpha \mid \gamma)(\alpha \mid \varkappa)$; $(\alpha\beta, \beta\lambda, \gamma\varkappa) = (\beta \mid \gamma)(\beta \mid \varkappa)$. Durch Multiplikation erhält man

15. $$(\alpha\beta, \alpha\beta, \gamma\varkappa) = (\alpha \mid \gamma)(\alpha \mid \varkappa)(\beta \mid \gamma)(\beta \mid \varkappa).$$

Man kann also schreiben

$$A_\alpha = (\alpha \mid \gamma)(\alpha \mid \varkappa)(\alpha \mid \beta)\, c^2_{\beta\gamma\varkappa} = (\alpha \mid \beta)(\alpha \mid \gamma)(\alpha \mid \varkappa)\, c^2_{\alpha\lambda\mu},$$
$$A_\beta = (\beta \mid \gamma)(\beta \mid \varkappa)(\beta \mid \alpha)\, c^2_{\alpha\gamma\varkappa} = (\beta \mid \alpha)(\beta \mid \gamma)(\beta \mid \varkappa)\, c^2_{\beta\lambda\mu},$$

und ferner

$$A_\gamma = (\gamma \mid \alpha)(\gamma \mid \beta)(\gamma \mid \varkappa)\, c^2_{\gamma\lambda\mu},$$
$$A_\varkappa = (\varkappa \mid \alpha)(\varkappa \mid \beta)(\varkappa \mid \gamma)\, c^2_{\varkappa\lambda\mu}.$$

Es besteht demnach die Gleichung

16. $$\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\varkappa} (\alpha \mid \beta)(\alpha \mid \gamma)(\alpha \mid \varkappa)\, c^2_{\alpha\lambda\mu} . \vartheta^2_\alpha = 0.$$

Dividiert man diese Gleichung durch $\vartheta^2_\varkappa$, vermehrt v um die halbe Periode $\omega_{\lambda\mu}$, und multipliziert mit $\vartheta^2_{\varkappa\lambda\mu}$, so tritt zu dem ersten Gliede das Vorzeichen $(\alpha\varkappa, \alpha\varkappa, \lambda\mu) = (\alpha \mid \lambda)(\alpha \mid \mu)(\varkappa \mid \lambda)(\varkappa \mid \mu)$ hinzu. Multipliziert man die ganze Gleichung mit $(\varkappa \mid \lambda)(\varkappa \mid \mu)$, so erhält man

17. $$\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\varkappa} (\alpha \mid \beta)(\alpha \mid \gamma)(\alpha \mid \varkappa)(\alpha \mid \lambda)(\alpha \mid \mu) . c^2_{\alpha\lambda\mu} . \vartheta^2_{\alpha\lambda\mu} = 0.$$

Nach 9. lässt sich diese Gleichung auch folgendermassen schreiben:

18. $$\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\varkappa} \varrho_\alpha . c^2_{\alpha\lambda\mu} . \vartheta^2_{\alpha\lambda\mu} = 0.$$

Dividiert man die Gleichung 16. durch $\vartheta_\varkappa^2$ und vermehrt v um die halbe Periode $\omega_{\varkappa\lambda}$, so multipliziert sich das erste Glied mit dem Vorzeichen $(\alpha\varkappa, \alpha\varkappa, \varkappa\lambda)$. Seinen Wert bestimmt man auf folgende Weise. Es ist nach 8.

$$(\varkappa \mid \alpha)(\varkappa \mid \beta) = (\varkappa\gamma, \varkappa\lambda, \alpha\beta);$$

ebenso ist

$$(\alpha \mid \varkappa)(\alpha \mid \lambda) = (\alpha\beta, \alpha\gamma, \varkappa\lambda) = (\alpha\gamma, \varkappa\lambda, \alpha\beta).$$

Durch Multiplikation entsteht

19. $$-(\varkappa \mid \beta)(\alpha \mid \lambda) = (\alpha\varkappa, \varkappa\lambda, \alpha\beta).$$

Ferner ist nach 8.

$$(\varkappa \mid \gamma)(\varkappa \mid \mu) = (\alpha\varkappa, \beta\varkappa, \gamma\mu).$$

Multipliziert man diese Gleichung mit

$$-1 = (\alpha\varkappa, \beta\varkappa, \alpha\beta),$$

so folgt

20. $$-(\varkappa \mid \gamma)(\varkappa \mid \mu) = (\alpha\varkappa, \beta\varkappa, \varkappa\lambda) = (\alpha\varkappa, \varkappa\lambda, \beta\varkappa).$$

Multipliziert man endlich 19. und 20., so entsteht

21. $$(\alpha\varkappa, \alpha\varkappa, \varkappa\lambda) = (\alpha \mid \lambda)(\varkappa \mid \beta)(\varkappa \mid \gamma)(\varkappa \mid \mu).$$

Setzt man diesen Wert in der angegebenen Gleichung ein, und multipliziert sie mit $(\varkappa \mid \alpha)(\varkappa \mid \beta)(\varkappa \mid \gamma)(\varkappa \mid \mu)$, so erhält man

22. $$\sum_{\alpha, \beta, \gamma} (\alpha \mid \beta)(\alpha \mid \gamma)(\alpha \mid \lambda)\, c^2_{\alpha\lambda\mu}\, \vartheta^2_{\alpha\varkappa\lambda} = (\varkappa \mid \mu)\, c^2_{\varkappa\lambda\mu} \vartheta^2_\lambda.$$

Dividiert man 16. durch ϑ_λ^2 und vermehrt v um die halbe Periode $\omega_{\gamma\varkappa}$, so multipliziert sich das erste Glied der Gleichung mit dem Vorzeichen

$$(\alpha\lambda, \alpha\lambda, \gamma\varkappa) = (\alpha \mid \gamma)(\alpha \mid \varkappa)(\lambda \mid \gamma)(\lambda \mid \varkappa).$$

Das dritte Glied multipliziert sich mit dem Vorzeichen

$$(\gamma\lambda, \gamma\lambda, \gamma\varkappa) = (\lambda \mid \varkappa)(\gamma \mid \alpha)(\gamma \mid \beta)(\gamma \mid \mu).$$

Multiplipliziert man die ganze Gleichung mit $(\lambda \mid \gamma)(\lambda \mid \varkappa)$, so ergibt sich also:

23. $$(\alpha \mid \beta)\left[c^2_{\alpha\lambda\mu} . \vartheta^2_{\alpha\gamma\varkappa} - c^2_{\beta\lambda\mu} . \vartheta^2_{\beta\gamma\varkappa}\right] = \sum_{\gamma, \varkappa} (\gamma \mid \varkappa)(\gamma \mid \lambda)(\gamma \mid \mu)\, c^2_{\gamma\lambda\mu} . \vartheta^2_\varkappa.$$

In den Gleichungen 10, 12, 13, 16, 18, 22, 23 sind die homogenen linearen Relationen, welche zwischen den Quadraten und den Produkten zweier Thetafunktionen bestehen, vollständig angegeben.

Setzt man in 18. und 22. $v = 0$, so ergeben sich zwei Konstantengleichungen:

24. $$\sum_{\alpha, \beta, \gamma, \varkappa} \varrho_\alpha\, c^4_{\alpha\lambda\mu} = 0;$$

25. $$\sum_{\alpha, \beta, \gamma} (\alpha \mid \beta)(\alpha \mid \gamma)(\alpha \mid \lambda) . c^2_{\alpha\lambda\mu} . c^2_{\alpha\varkappa\lambda} = 0.$$

Eine dritte wichtige Konstantenrelation erhält man auf folgende Weise. Der lineare Bestandteil von ϑ_α heisse $A_\alpha v + B_\alpha v'$. Die Gleichung

$$A \vartheta_\alpha \vartheta_{\alpha\varkappa\lambda} + B \vartheta_\beta \vartheta_{\beta\varkappa\lambda} + C \vartheta_\gamma \vartheta_{\gamma\varkappa\lambda} = 0$$

muss auch für die linearen Glieder von $\vartheta_\alpha, \vartheta_\beta, \vartheta_\gamma$ bestehen. Folglich ist

$$A A_\alpha c_{\alpha\varkappa\lambda} + B A_\beta c_{\beta\varkappa\lambda} + C A_\gamma c_{\gamma\varkappa\lambda} = 0;$$
$$A B_\alpha c_{\alpha\varkappa\lambda} + B B_\beta c_{\beta\varkappa\lambda} + C B_\gamma c_{\gamma\varkappa\gamma} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich

$$\frac{A c_{\alpha\varkappa\lambda}}{A_\beta B_\gamma - A_\gamma B_\beta} = \frac{B c_{\beta\varkappa\lambda}}{A_\gamma B_\alpha - A_\alpha B_\gamma} = \frac{C c_{\gamma\varkappa\lambda}}{A_\alpha B_\beta - A_\beta B_\alpha}.$$

Nun ist nach 10.

$$\frac{A}{B}=\frac{(\beta\mid\gamma)\,.\,c_{\alpha\varkappa\mu}\,.\,c_{\alpha\lambda\mu}}{(\gamma\mid\alpha)\,.\,c_{\beta\varkappa\mu}\,.\,c_{\beta\lambda\mu}}=\frac{(\beta\mid\gamma)\,.\,c_{\beta\gamma\varkappa}\,.\,c_{\beta\gamma\lambda}}{(\gamma\mid\alpha)\,.\,c_{\alpha\gamma\varkappa}\,.\,c_{\alpha\gamma\lambda}}.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

$$\frac{c_{\beta\gamma\varkappa}\,.\,c_{\beta\gamma\lambda}\,.\,c_{\beta\gamma\mu}}{c_{\alpha\gamma\varkappa}\,.\,c_{\alpha\gamma\lambda}\,.\,c_{\alpha\gamma\mu}}=\frac{(\beta\mid\gamma)\,(A_\beta B_\gamma-A_\gamma B_\beta)}{(\gamma\mid\alpha)\,(A_\gamma B_\alpha-A_\alpha B_\gamma)}.$$

Multipliziert man die linke Seite dieser Gleichung im Zähler und im Nenner mit $c_{\alpha\beta\gamma}$, so erkennt man, dass man schreiben kann

26. $$c_{\alpha\beta\gamma}\,.\,c_{\alpha\beta\varkappa}\,.\,c_{\alpha\beta\lambda}\,.\,c_{\alpha\beta\mu}=r\,.\,(\alpha\mid\beta)\,(A_\alpha B_\beta-A_\beta B_\alpha),$$

wo r eine symmetrische Funktion der Indices bedeutet.

Es wird noch gezeigt werden, dass r von den Grössen τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} ganz unabhängig ist, und den Wert $\pm\frac{1}{\pi^2}$ besitzt. Die Gleichung 26. bildet das Analogon zu der aus der Theorie der elliptischen Funktionen bekannten Gleichung $\vartheta'(0)=\pi\,.\,\vartheta_1(0)\,.\,\vartheta_2(0)\,.\,\vartheta_3(0)$.

Ausser den zwischen den Thetafunktionen bestehenden Gleichungen 10, 12, 13, 16, 18, 22, 23 gibt es noch andere, in denen die Ableitungen der Thetafunktionen vorkommen. Es wurde schon bemerkt, dass sich z. B. $\vartheta_\varkappa\frac{\partial\vartheta_\lambda}{\partial v}-\vartheta_\lambda\frac{\partial\vartheta_\varkappa}{\partial v}$ durch die Produkte $\vartheta_\alpha\vartheta_{\alpha\varkappa\lambda}$, $\vartheta_\beta\vartheta_{\beta\varkappa\lambda}$ ausdrücken lasse. Schreibt man

$$\vartheta_\varkappa\frac{\partial\vartheta_\lambda}{\partial v}-\vartheta_\lambda\frac{\partial\vartheta_\varkappa}{\partial v}=A\vartheta_\alpha\vartheta_{\alpha\varkappa\lambda}+B\vartheta_\beta\vartheta_{\beta\varkappa\lambda}$$

und stellt diese Gleichung für die linearen Glieder auf, so erhält man

$$(A_\varkappa v+B_\varkappa v')A_\lambda-(A_\lambda v+B_\lambda v')A_\varkappa$$
$$=A\,c_{\alpha\varkappa\lambda}(A_\alpha v+B_\alpha v')+B\,c_{\beta\varkappa\lambda}(A_\beta v+B_\beta v').$$

Hieraus folgt

$$A\,.\,A_\alpha c_{\alpha\varkappa\lambda}+B\,.\,A_\beta c_{\beta\varkappa\lambda}=0;$$
$$A_\lambda B_\varkappa-A_\varkappa B_\lambda=A\,.\,B_\alpha c_{\alpha\varkappa\lambda}+B\,.\,B_\beta c_{\beta\varkappa\lambda}.$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich für A der Wert

$$A=\frac{A_\varkappa B_\lambda-A_\lambda B_\varkappa}{A_\alpha B_\beta-A_\beta B_\alpha}\cdot\frac{A_\beta}{c_{\alpha\varkappa\lambda}}$$

oder, wenn man 26. beachtet,

$$A=\frac{(\varkappa\mid\lambda)\,A_\beta\,.\,c_{\beta\varkappa\lambda}}{(\alpha\mid\beta)\,c_{\alpha\beta\varkappa}\,.\,c_{\alpha\beta\lambda}};\quad B=-\frac{(\varkappa\mid\lambda)\,A_\alpha\,.\,c_{\alpha\varkappa\lambda}}{(\alpha\mid\beta)\,c_{\alpha\beta\varkappa}\,.\,c_{\alpha\beta\lambda}}.$$

Mithin ist

27. $$c_{\alpha\beta\varkappa}\,.\,c_{\alpha\beta\lambda}\left[\vartheta_\varkappa\frac{\partial\vartheta_\lambda}{\partial v}-\vartheta_\lambda\frac{\partial\vartheta_\varkappa}{\partial v}\right]$$
$$=(\alpha\mid\beta)\,(\varkappa\mid\lambda)\,[A_\beta c_{\beta\varkappa\lambda}\vartheta_\alpha\,.\,\vartheta_{\alpha\varkappa\lambda}-A_\alpha c_{\alpha\varkappa\lambda}\vartheta_\beta\,.\,\vartheta_{\beta\varkappa\lambda}].$$

Es ist $$\vartheta_\varkappa \frac{\partial \vartheta_\lambda}{\partial v} - \vartheta_\lambda \frac{\partial \vartheta_\varkappa}{\partial v} = \vartheta_\varkappa . \vartheta_\lambda . \frac{\partial \log \frac{\vartheta_\lambda}{\vartheta_\varkappa}}{\partial v}.$$

Nach 9. § 1. geht $\frac{\vartheta_\lambda}{\vartheta_\varkappa}$ bei der Vermehrung des Argumentes um die halbe Periode ω_m, abgesehen von einem konstanten Faktor, in $\frac{\vartheta_{\lambda m}}{\vartheta_{\varkappa m}}$ über. Vermehrt man v um ω_m, so geht also $\frac{\partial \log \frac{\vartheta_\lambda}{\vartheta_\varkappa}}{\partial v}$ in $\frac{\partial \log \frac{\vartheta_{\lambda m}}{\vartheta_{\varkappa m}}}{\partial v}$ über. Man dividiere 27. durch $\vartheta_\varkappa \vartheta_\lambda$ und vermehre v um die halbe Periode $\omega_{\alpha\varkappa}$. Dann multipliziert sich das erste Glied der rechten Seite mit dem Vorzeichen

$$(\alpha\varkappa, \alpha\lambda, \alpha\varkappa) = (\varkappa \mid \lambda)(\alpha \mid \beta)(\alpha \mid \gamma)(\alpha \mid \mu),$$

[siehe 21.]; das zweite Glied multipliziert sich mit dem Vorzeichen

$$(\beta\varkappa, \beta\lambda, \alpha\varkappa) = -(\beta \mid \alpha)(\varkappa \mid \lambda),$$

[siehe 19.]. Folglich erhält man

28. $$c_{\alpha\beta\varkappa} . c_{\alpha\beta\lambda}\left[\vartheta_{\alpha\varkappa\lambda}\frac{\partial \vartheta_\alpha}{\partial v} - \vartheta_\alpha \frac{\partial \vartheta_{\alpha\varkappa\lambda}}{\partial v}\right]$$
$$= A_\alpha c_{\alpha\varkappa\lambda}\vartheta_{\alpha\beta\varkappa}\vartheta_{\alpha\beta\lambda} - (\alpha \mid \gamma)(\alpha \mid \mu) A_\beta c_{\beta\varkappa\lambda}\vartheta_\varkappa\vartheta_\lambda.$$

Dividiert man 27. durch $\vartheta_\varkappa\vartheta_\lambda$ und vermehrt v um die halbe Periode $\omega_{\alpha\beta}$, so tritt auf der rechten Seite beim ersten Gliede das Vorzeichen

$$(\alpha\varkappa, \alpha\lambda, \alpha\beta) = -(\alpha \mid \gamma)(\alpha \mid \mu),$$

[siehe 20.], beim 2. Gliede das Vorzeichen

$$(\beta\varkappa, \beta\lambda, \alpha\beta) = -(\beta \mid \gamma)(\beta \mid \mu)$$

hinzu; folglich ist

29. $$c_{\alpha\beta\varkappa} . c_{\alpha\beta\lambda} . \left[\vartheta_{\alpha\beta\varkappa}\frac{\partial \vartheta_{\alpha\beta\lambda}}{\partial v} - \vartheta_{\alpha\beta\lambda}\frac{\partial \vartheta_{\alpha\beta\varkappa}}{\partial v}\right]$$
$$= (\alpha \mid \beta)(\varkappa \mid \lambda)\left[(\beta \mid \gamma)(\beta \mid \mu) A_\alpha c_{\alpha\varkappa\lambda}\vartheta_\alpha\vartheta_{\alpha\varkappa\lambda} - (\alpha \mid \gamma)(\alpha \mid \mu) A_\beta c_{\beta\varkappa\lambda}\vartheta_\beta\vartheta_{\beta\varkappa\lambda}\right].$$

Die Gleichung 28. erlaubt, den Wert von r in der Gleichung 26. zu bestimmen. Setzt man in 28. die Koeffizienten von v^2 und $v\,v'$ gleich 0, und dividiert die entstehenden Gleichungen durch $\frac{1}{2} c_{\alpha\beta\varkappa} c_{\alpha\beta\lambda} c_{\alpha\varkappa\lambda}$, resp. $c_{\alpha\beta\varkappa} c_{\alpha\beta\lambda} c_{\alpha\varkappa\lambda}$, so erhält man, wenn man mit $\overset{20}{c}_{\alpha\beta\gamma}$, $\overset{11}{c}_{\alpha\beta\gamma}$, $\overset{02}{c}_{\alpha\beta\gamma}$ die Werte der 2. Ableitungen von $\vartheta_{\alpha\beta\gamma}$ nach den Argumenten für $v, v' = 0$, mit $\overset{30}{c}_\alpha$, $\overset{21}{c}_\alpha$, $\overset{12}{c}_\alpha$, $\overset{03}{c}_\alpha$ die Werte der 3. Ableitungen von ϑ_α für $v, v' = 0$ bezeichnet,

$$30.\quad \overset{30}{c}_\alpha - A_\alpha \frac{\overset{20}{c}_{\alpha\kappa\lambda}}{c_{\alpha\kappa\lambda}} = A_\alpha \left[\frac{\overset{20}{c}_{\alpha\beta\kappa}}{c_{\alpha\beta\kappa}} + \frac{\overset{20}{c}_{\alpha\beta\lambda}}{c_{\alpha\beta\lambda}}\right] - 2(\alpha\,|\,\gamma)\,(\alpha\,|\,\mu)\frac{A_\beta c_{\beta\kappa\lambda} A_\kappa A_\lambda}{c_{\alpha\beta\kappa}\, c_{\alpha\beta\lambda}\, c_{\alpha\kappa\lambda}}.$$

$$31.\quad \overset{21}{c}_\alpha - B_\alpha \frac{\overset{20}{c}_{\alpha\kappa\lambda}}{c_{\alpha\kappa\lambda}} = A_\alpha \left[\frac{\overset{11}{c}_{\alpha\beta\kappa}}{c_{\alpha\beta\kappa}} + \frac{\overset{11}{c}_{\alpha\beta\lambda}}{c_{\alpha\beta\lambda}}\right] - (\alpha\,|\,\gamma)(\alpha\,|\,\mu)\frac{A_\beta . c_{\beta\kappa\lambda}(A_\kappa B_\lambda + A_\lambda B_\kappa)}{c_{\alpha\beta\kappa}\, c_{\alpha\beta\lambda}\, c_{\alpha\kappa\lambda}}.$$

Stellt man die der Gleichung 28. entsprechende in den Ableitungen nach v' auf, und setzt wieder die Koeffizienten von v^2 und $v v' = 0$, so folgt

$$32.\quad \overset{21}{c}_\alpha + B_\alpha \frac{\overset{20}{c}_{\alpha\kappa\lambda}}{c_{\alpha\kappa\lambda}} - 2A_\alpha \frac{\overset{11}{c}_{\alpha\kappa\lambda}}{c_{\alpha\kappa\lambda}} = B_\alpha \left[\frac{\overset{20}{c}_{\alpha\beta\kappa}}{c_{\alpha\beta\kappa}} + \frac{\overset{20}{c}_{\alpha\beta\lambda}}{c_{\alpha\beta\lambda}}\right]$$
$$- 2(\alpha\,|\,\gamma)\,(\alpha\,|\,\mu)\frac{B_\beta c_{\beta\kappa\lambda} A_\kappa A_\lambda}{c_{\alpha\beta\kappa}\, c_{\alpha\beta\lambda}\, c_{\alpha\kappa\lambda}}.$$

$$33.\quad \overset{12}{c}_\alpha - A_\alpha \frac{\overset{02}{c}_{\alpha\kappa\lambda}}{c_{\alpha\kappa\lambda}} = B_\alpha \left[\frac{\overset{11}{c}_{\alpha\beta\kappa}}{c_{\alpha\beta\kappa}} + \frac{\overset{11}{c}_{\alpha\beta\lambda}}{c_{\alpha\beta\lambda}}\right] - (\alpha\,|\,\gamma)\,(\alpha\,|\,\mu)\frac{B_\beta c_{\beta\kappa\lambda}(A_\kappa B_\lambda + A_\lambda B_\kappa)}{c_{\alpha\beta\kappa}\, c_{\alpha\beta\lambda}\, c_{\alpha\kappa\lambda}}.$$

Differenziert man 28. logarithmisch nach τ_{11} und beachtet, dass nach 1. § 1

$$\frac{\partial c_{\alpha\beta\gamma}}{\partial \tau_{11}} = \pi i \sum (n+\nu)^2 e^{\pi i g\,(0,\,0;\; n,\,n')},$$

$$\overset{20}{c}_{\alpha\beta\gamma} = (2\pi i)^2 . \sum (n+\nu)^2 e^{\pi i g\,(0,\,0;\; n,\,n')},$$

also $\dfrac{\partial c_{\alpha\beta\gamma}}{\partial \tau_{11}} = \dfrac{1}{4\pi i}\overset{20}{c}_{\alpha\beta\gamma}$, und ferner $\dfrac{\partial A_\alpha}{\partial \tau_{11}} = \dfrac{1}{4\pi i}\overset{30}{c}_\alpha$; $\dfrac{\partial B_\alpha}{\partial \tau_{11}} = \dfrac{1}{4\pi i}\overset{21}{c}_\alpha$ ist, so erhält man

$$34.\quad \frac{\overset{20}{c}_{\alpha\beta\gamma}}{c_{\alpha\beta\gamma}} + \frac{\overset{20}{c}_{\alpha\beta\kappa}}{c_{\alpha\beta\kappa}} + \frac{\overset{20}{c}_{\alpha\beta\lambda}}{c_{\alpha\beta\lambda}} + \frac{\overset{20}{c}_{\alpha\beta\mu}}{c_{\alpha\beta\mu}} = 4\pi i \frac{\partial \log r}{\partial \tau_{11}}$$
$$+ \frac{\overset{30}{c}_\alpha B_\beta - \overset{21}{c}_\alpha A_\beta + \overset{21}{c}_\beta A_\alpha - \overset{30}{c}_\beta B_\alpha}{A_\alpha B_\beta - B_\alpha A_\beta}.$$

Multipliziert man 30. mit B_β, 32. mit A_β und subtrahiert, so folgt

$$35.\quad \overset{30}{c}_\alpha B_\beta - \overset{21}{c}_\alpha A_\beta = (A_\alpha B_\beta - B_\alpha A_\beta)\left[\frac{\overset{20}{c}_{\alpha\beta\kappa}}{c_{\alpha\beta\kappa}} + \frac{\overset{20}{c}_{\alpha\beta\lambda}}{c_{\alpha\beta\lambda}}\right]$$
$$+ \frac{\overset{20}{c}_{\alpha\kappa\lambda}}{c_{\alpha\kappa\lambda}}[A_\alpha B_\beta + B_\alpha A_\beta] - 2A_\alpha A_\beta \frac{\overset{11}{c}_{\alpha\kappa\lambda}}{c_{\alpha\kappa\lambda}}.$$

Vertauscht man in dieser Gleichung α mit β, κ mit γ, λ mit μ, so entsteht

$$36.\quad \overset{30}{c}_\beta B_\alpha - \overset{21}{c}_\beta A_\alpha = (A_\beta B_\alpha - B_\beta A_\alpha)\left[\frac{\overset{20}{c}_{\alpha\beta\gamma}}{c_{\alpha\beta\gamma}} + \frac{\overset{20}{c}_{\alpha\beta\mu}}{c_{\alpha\beta\mu}}\right]$$
$$+ \frac{\overset{20}{c}_{\beta\gamma\mu}}{c_{\beta\gamma\mu}}[A_\beta B_\alpha + B_\beta A_\alpha] - 2 A_\alpha A_\beta \frac{\overset{11}{c}_{\beta\gamma\mu}}{c_{\beta\gamma\mu}}.$$

Subtrahiert man 36. von 35., so ergibt sich, da $c_{\alpha\varkappa\lambda} = c_{\beta\gamma\mu}$ ist,

$$\overset{30}{c_\alpha} B_\beta - \overset{21}{c_\alpha} A_\beta + \overset{21}{c_\beta} A_\alpha - \overset{30}{c_\beta} B_\alpha =$$

$$(A_\alpha B_\beta - B_\alpha A_\beta)\left[\frac{\overset{20}{c_{\alpha\beta\gamma}}}{c_{\alpha\beta\gamma}} + \frac{\overset{20}{c_{\alpha\beta\varkappa}}}{c_{\alpha\beta\varkappa}} + \frac{\overset{20}{c_{\alpha\beta\lambda}}}{c_{\alpha\beta\lambda}} + \frac{\overset{20}{c_{\alpha\beta\mu}}}{c_{\alpha\beta\mu}}\right].$$

Vergleicht man diese Gleichung mit 34., so erkennt man, dass $\frac{\partial \log r}{\partial \tau_{11}} = 0$ ist; also ist r von τ_{11} und folglich auch von τ_{22} unabhängig. Differenziert man 26. logarithmisch nach τ_{12}, so ergibt sich in ähnlicher Weise aus den Gleichungen 31. und 33., dass r auch von τ_{12} unabhängig ist. Demnach ist r eine absolute Konstante. Um sie zu bestimmen, verfahren wir folgendermassen: Wir ordnen dem Index α die Charakteristik (11 0 0), und dem Index β die Charakteristik (0 0 11) zu. Dann gehören zu den Indices $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta\varkappa$, $\alpha\beta\lambda$, $\alpha\beta\mu$ folgende Charakteristiken

$\alpha\beta\gamma$	1	0	0	0
$\alpha\beta\varkappa$	0	1	0	0
$\alpha\beta\lambda$	0	0	1	0
$\alpha\beta\mu$	0	0	0	1

Wir setzen nun $\tau_{12} = 0$. Dann zerfallen sämtliche Konstanten in Konstanten elliptischer Thetafunktionen, und zwar ist

$$A_\alpha = 2\pi i \sum (n+\tfrac{1}{2}) e^{\pi i[\tau_{11}(n+\frac{1}{2})^2+n+\frac{1}{2}]} . \sum e^{\pi i \tau_{22} n^2},$$

$$B_\alpha = 2\pi i \sum e^{\pi i[\tau_{11}(n+\frac{1}{2})^2+n+\frac{1}{2}]} . \sum n e^{\pi i \tau_{22} n^2} = 0,$$

$$A_\beta = 2\pi i \sum n e^{\pi i \tau_{11} n^2} . \sum e^{\pi i[\tau_{22}(n+\frac{1}{2})^2+n+\frac{1}{2}]} = 0,$$

$$B_\beta = 2\pi i \sum e^{\pi i \tau_{11} n^2} . \sum (n+\tfrac{1}{2}) e^{\pi i[\tau_{22}(n+\frac{1}{2})^2+n+\frac{1}{2}]},$$

$$c_{\alpha\beta\gamma} = \sum e^{\pi i[\tau_{11} n^2+n]} . \sum e^{\pi i \tau_{22} n^2},$$

$$c_{\alpha\beta\varkappa} = \sum e^{\pi i \tau_{11}(n+\frac{1}{2})^2} . \sum e^{\pi i \tau_{22} n^2},$$

$$c_{\alpha\beta\lambda} = \sum e^{\pi i \tau_{11} n^2} . \sum e^{\pi i[\tau_{22} n^2+n]},$$

$$c_{\alpha\beta\mu} = \sum e^{\pi i \tau_{11} n^2} . \sum e^{\pi i \tau_{22}(n+\frac{1}{2})^2}.$$

Setzt man diese Werte in 26. ein und beachtet die Gleichung $\vartheta'(0) = \pi \vartheta_1(0) \vartheta_2(0) \vartheta_3(0)$, d. h. die Gleichung

$$\sum (n+\tfrac{1}{2}) e^{\pi i[\tau(n+\frac{1}{2})^2+n+\frac{1}{2}]} = \frac{i}{2} \sum e^{\pi i \tau (n+\frac{1}{2})^2} \sum e^{\pi i[\tau n^2+n]} \sum e^{\pi i \tau n^2},$$

so erhält man $\frac{1}{\pi^2} = (\alpha \mid \beta) r$. Demnach hat r den Wert $\pm \frac{1}{\pi^2}$.

Aus 7. § 1 geht hervor, dass die zweiten logarithmischen Ableitungen der Thetafunktionen ungeändert bleiben, wenn man das

Argument um ganze Perioden vermehrt. Folglich ist $\frac{\partial^2 \log \vartheta_a}{\partial v^2}$ eine Abelsche Funktion. Da sie unendlich wird wie const. ϑ_a^{-2}, so muss sich $\vartheta_a^2 \frac{\partial^2 \log \vartheta_a}{\partial v^2}$ homogen und linear durch 4 Thetaquadrate ausdrücken lassen. Wählt man dazu die Quadrate ϑ_a^2, ϑ_β^2, ϑ_γ^2, $\vartheta_{a\beta\gamma}^2$, so besteht nicht schon zwischen diesen eine Gleichung der Form

$$A\vartheta_a^2 + B\vartheta_\beta^2 + C\vartheta_\gamma^2 + D\vartheta_{a\beta\gamma}^2 = 0.$$

Denn vermehrt man v um die halben Perioden $\omega_{\beta\gamma}$, $\omega_{\gamma a}$, $\omega_{a\beta}$ und setzt $v = 0$, so folgt $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$. Schreibt man

37. $$\vartheta_a^2 \frac{\partial^2 \log \vartheta_a}{\partial v^2} = A\vartheta_a^2 + B\vartheta_\beta^2 + C\vartheta_\gamma^2 + D\vartheta_{a\beta\gamma}^2,$$

dividiert die Gleichung durch ϑ_a^2, vermehrt v um die halben Perioden $\omega_{\beta\gamma}$, $\omega_{a\gamma}$, $\omega_{a\beta}$, und setzt dann $v = 0$, so erhält man, wenn man beachtet, dass

$$\vartheta_a^2 \frac{\partial^2 \log \vartheta_a}{\partial v^2} = \vartheta_a \frac{\partial^2 \vartheta_a}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial \vartheta_a}{\partial v}\right)^2$$

ist,

$$c_{a\beta\gamma} \cdot \overset{20}{c}_{a\beta\gamma} = A c_{a\beta\gamma}^2,$$

$$-A_\gamma^2 = (a\beta, a\beta, a\gamma)\, B c_{a\beta\gamma}^2 = (\beta \mid \gamma)(a \mid \varkappa)(a \mid \lambda)(a \mid \mu) B c_{a\beta\gamma}^2.$$

$$-A_\beta^2 = (a\gamma, a\gamma, a\beta)\, C c_{a\beta\gamma}^2 = (\gamma \mid \beta)(a \mid \varkappa)(a \mid \lambda)(a \mid \mu)\, C c_{a\beta\gamma}^2.$$

Setzt man endlich in der Gleichung 37 selbst $v = 0$, so folgt

$$-A_a^2 = D c_{a\beta\gamma}^2.$$

Demnach ist

38. $$c_{a\beta\gamma}^2 \vartheta_a^2 \frac{\partial^2 \log \vartheta_a}{\partial v^2} = c_{a\beta\gamma} \overset{20}{c}_{a\beta\gamma} \vartheta_a^2 - A_a^2 \vartheta_{a\beta\gamma}^2$$
$$+ (\beta \mid \gamma)(a \mid \varkappa)(a \mid \lambda)(a \mid \mu)\left[A_\beta^2 \vartheta_\gamma^2 - A_\gamma^2 \vartheta_\beta^2\right].$$

In ähnlicher Weise erhält man

38. $$c_{a\beta\gamma}^2 \vartheta_a^2 \frac{\partial^2 \log \vartheta_a}{\partial v \partial v'} = c_{a\beta\gamma} \overset{11}{c}_{a\beta\gamma} \vartheta_a^2 - A_a B_a \vartheta_{a\beta\gamma}^2$$
$$+ (\beta \mid \gamma)(a \mid \varkappa)(a \mid \lambda)(a \mid \mu)\left[A_\beta B_\beta \vartheta_\gamma^2 - A_\gamma B_\gamma \vartheta_\beta^2\right],$$

38. $$c_{a\beta\gamma}^2 \vartheta_a^2 \frac{\partial^2 \log \vartheta_a}{\partial v'^2} = c_{a\beta\gamma} \overset{02}{c}_{a\beta\gamma} \vartheta_a^2 - B_a^2 \vartheta_{a\beta\gamma}^2$$
$$+ (\beta \mid \gamma)(a \mid \varkappa)(a \mid \lambda)(a \mid \mu)\left[B_\beta^2 \vartheta_\gamma^2 - B_\gamma^2 \vartheta_\beta^2\right].$$

Dividiert man 38. durch ϑ_a^2, vermehrt v um die halbe Periode $\omega_{\beta\gamma}$ und beachtet, dass

$$(\beta\gamma, \beta\gamma, \beta\gamma) = (\beta\gamma, \beta\gamma, \alpha\varkappa)(\beta\gamma, \beta\gamma, \lambda\mu)$$
$$= (\beta \mid \alpha)(\beta \mid \varkappa)(\gamma \mid \alpha)(\gamma \mid \varkappa)(\beta \mid \mu)(\beta \mid \lambda)(\gamma \mid \mu)(\gamma \mid \lambda)$$
$$= -\varrho_\beta \cdot \varrho_\gamma$$

ist, so ergibt sich

39. $$c^2_{\alpha\beta\gamma}\vartheta^2_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial^2 \log \vartheta_{\alpha\beta\gamma}}{\partial v^2} = c_{\alpha\beta\gamma}\overset{\circ\circ}{c}_{\alpha\beta\gamma}\vartheta^2_{\alpha\beta\gamma}$$
$$+\varrho_\alpha\varrho_\beta\varrho_\gamma\left[\varrho_\alpha A^2_\alpha\vartheta^2_\alpha + \varrho_\beta A^2_\beta\vartheta^2_\beta + \varrho_\gamma A^2_\gamma\vartheta^2_\gamma\right].$$

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, die Konstanten A_α, B_α, $c_{\alpha\beta\gamma}$ durch 6 unabhängige Parameter auszudrücken. Unterwirft man die Argumente v, v' einer homogenen, linearen Transformation, deren Koeffizienten willkürlich sind, und schreibt das lineare Glied von ϑ_α

40. $$u_\alpha = c_\alpha(u' - e_\alpha u); \quad \alpha = 1, 2, 3 \ldots 6,$$

so sind drei der Grössen e_α ganz willkürlich und alle 6 voneinander unabhängig. Da die Gleichung

41. $$A\vartheta_\alpha\vartheta_{\alpha\varkappa\lambda} + B\vartheta_\beta\vartheta_{\beta\varkappa\lambda} + C\vartheta_\gamma\vartheta_{\gamma\varkappa\lambda} = 0$$

auch für die linearen Glieder von ϑ_α, ϑ_β, ϑ_γ bestehen muss, so ergibt sich

42. $$\frac{A c_\alpha \cdot c_{\alpha\varkappa\lambda}}{e_\beta - e_\gamma} = \frac{B c^\beta \cdot c_{\beta\varkappa\lambda}}{e_\gamma - e_\alpha} = \frac{C c_\gamma \cdot c_{\gamma\varkappa\lambda}}{e_\alpha - e_\beta}.$$

Vermehrt man in 41. u um die halbe Periode $\omega_{\alpha\beta}$, nachdem man durch ϑ_α $\vartheta_{\alpha\varkappa\lambda}$ dividiert hat, so folgt

$$A\vartheta_\beta\vartheta_{\beta\varkappa\lambda} + (\alpha\beta, \gamma\mu, \alpha\beta)B\vartheta_\alpha\vartheta_{\alpha\varkappa\lambda} + (\alpha\gamma, \beta\mu, \alpha\beta)C\vartheta_\mu\vartheta_{\mu\varkappa\lambda} = 0.$$

Hieraus erhält man ebenso wie vorhin

43. $$\frac{A c_\beta c_{\beta\varkappa\lambda}}{e_\alpha - e_\mu} = (\alpha\beta, \gamma\mu, \alpha\beta)\frac{B c_\alpha c_{\alpha\varkappa\lambda}}{e_\mu - e_\beta} = (\alpha\gamma, \beta\mu, \alpha\beta)\frac{C c_\mu c_{\mu\varkappa\lambda}}{e_\beta - e_\alpha}.$$

Aus 42. und 43. folgt

$$\frac{c^2_\alpha c^2_{\alpha\varkappa\lambda}}{c^2_\beta c^2_{\beta\varkappa\lambda}} = (\alpha\beta, \gamma\mu, \alpha\beta) \cdot \frac{(e_\beta - e_\gamma)(e_\beta - e_\mu)}{(e_\alpha - e_\gamma)(e_\alpha - e_\mu)}.$$

Nun ist $(\alpha\beta, \gamma\mu, \alpha\beta) = (\alpha \mid \gamma)(\alpha \mid \mu)(\beta \mid \gamma)(\beta \mid \mu)$ [siehe 15]. Schreibt man $(\alpha \mid \beta)(e_\alpha - e_\beta) = e_{\alpha\beta}$, so ergibt sich

44. $$\frac{c^2_\alpha c^2_{\alpha\varkappa\lambda}}{c^2_\beta c^2_{\beta\varkappa\lambda}} = \frac{e_{\beta\gamma} \cdot e_{\beta\mu}}{e_{\alpha\gamma} \cdot e_{\alpha\mu}}.$$

Ebenso ist

45. $$\frac{c^2_\alpha c^2_{\alpha\gamma\mu}}{c^2_\beta c^2_{\beta\gamma\mu}} = \frac{e_{\beta\varkappa} \cdot e_{\beta\lambda}}{e_{\alpha\varkappa} \cdot e_{\alpha\lambda}}.$$

Multipliziert man 44. und 45. miteinander und beachtet, dass $c_{\alpha\varkappa\lambda} = c_{\beta\gamma\mu}$, $c_{\beta\varkappa\lambda} = c_{\alpha\gamma\mu}$, so folgt

$$\frac{c_\alpha^4}{c_\beta^4} = \frac{e_{\beta\gamma} \cdot e_{\beta\varkappa} \cdot e_{\beta\lambda} \cdot e_{\beta\mu}}{e_{\alpha\gamma} \cdot e_{\alpha\varkappa} \cdot e_{\alpha\lambda} \cdot e_{\alpha\mu}}.$$

Aus dieser Gleichung erkennt man, dass man schreiben kann

46. $$c_\alpha^4 = r \cdot e_{\beta\gamma} \cdot e_{\beta\varkappa} \cdot e_{\beta\lambda} \cdot e_{\beta\mu} \cdot e_{\gamma\varkappa} \cdot e_{\gamma\lambda} \cdot e_{\gamma\mu} \cdot e_{\varkappa\lambda} \cdot e_{\varkappa\mu} \cdot e_{\lambda\mu},$$

wo r eine symmetrische Funktion der Indices bedeutet. Dividiert man 44. und 45., so folgt

$$\frac{c_{\alpha\varkappa\lambda}^4}{c_{\beta\varkappa\lambda}^4} = \frac{e_{\alpha\varkappa} \cdot e_{\varkappa\lambda} \cdot e_{\beta\gamma} \cdot e_{\beta\mu}}{e_{\beta\varkappa} \cdot e_{\beta\lambda} \cdot e_{\alpha\gamma} \cdot e_{\alpha\mu}}.$$

Aus dieser Gleichung erkennt man, dass man schreiben kann

47. $$c_{\alpha\varkappa\lambda}^4 = \varrho \;\; e_{\alpha\varkappa} \cdot e_{\varkappa\lambda} \cdot e_{\lambda\alpha} \cdot e_{\beta\gamma} \cdot e_{\gamma\mu} \cdot e_{\mu\beta},$$

wo ϱ ebenfalls eine symmetrische Funktion der Indices bedeutet. Schreibt man die Gleichung 26. in der Form

$$c_{\alpha\beta\gamma} \cdot c_{\alpha\beta\varkappa} \cdot c_{\alpha\beta\lambda} \cdot c_{\alpha\beta\mu} = R \cdot c_\alpha c_\beta \cdot e_{\alpha\beta}$$

und substituiert die aus ihr für $e_{\beta\gamma}$, $e_{\beta\varkappa}$ etc. sich ergebenden Werte in 46. und 47., so erhält man, wenn man das Produkt sämtlicher 6 Grössen c_α, $c_\beta \ldots c_\mu$ mit p, das sämtlicher 10 Grössen $c_{\alpha\beta\gamma}$, $c_{\alpha\beta\varkappa}$ etc. mit q bezeichnet,

48. $$r = R^2\left[\frac{R^2 p}{q}\right]^4; \;\; \varrho = R^2\left[\frac{R^2 p}{q}\right]^2.$$

Durch Hinzufügung eines konstanten Faktors zu den Argumenten u, u' kann man bewirken, dass

49. $$\frac{R^2 p}{q} = 1$$

wird. Dann nehmen r und ϱ beide denselben Wert R^2 an.

Zum Schlusse soll noch angegeben werden, auf welche Weise man durch eine besondere Zuordnung der Indices zu den ungeraden Charakteristiken eine möglichst einfache Bestimmung der Vorzeichen $(\alpha \mid \beta)$ erhält. Zunächst sollen in einer willkürlichen Reihenfolge die ungeraden Charakteristiken mit den Ziffern 1, 2, 3 ... 6 bezeichnet werden, z. B. in der folgenden

1	1	1	0	0
2	1	1	1	0
3	1	1	0	1
4	0	0	1	1
5	1	0	1	1
6	0	1	1	1

Da $\delta_1 = 1$, $\delta_1' = 0$; $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_1' = 0$ ist, so ist nach 17. § 1

$$-\varrho_1 \cdot \varrho_\varkappa = (-1)^{\delta_\varkappa + \varepsilon_\varkappa}.$$

Setzt man $\varrho_1 = +1$, so wird ϱ_5, ϱ_6 auch gleich $+1$; ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 aber werden gleich -1. Dann ergibt sich aus 7. § 2 und der obigen Tabelle $(1 \mid \varkappa) = -(-1)^{\delta_\varkappa'}$; $(2 \mid \varkappa) = -(-1)^{\delta_\varkappa'}$; $(3 \mid \varkappa) = +1$; $(4 \mid \varkappa) = (-1)^{\delta_\varkappa}$; $(5 \mid \varkappa) = (-1)^{\delta_\varkappa}$; $(6 \mid \varkappa) = -1$. Die Tabelle zeigt nun, dass von den Vorzeichen $(1 \mid \varkappa)$ vier positiv sind, von den $(2 \mid \varkappa)$ drei, von den $(3 \mid \varkappa)$ alle, von den $(4 \mid \varkappa)$ eines, von den $(5 \mid \varkappa)$ zwei; von den $(6 \mid \varkappa)$ ist keines positiv. Ordnet man die Indices den Charakteristiken in folgender Weise zu

1	1	1	0	1
2	1	1	0	0
3	1	1	1	0
4	1	0	1	1
5	0	0	1	1
6	0	1	1	1

so sind die Zeichen $(1 \mid \varkappa)$ alle positiv, von den $(2 \mid \varkappa)$ alle bis auf $(2 \mid 1)$, von den $(3 \mid \varkappa)$ alle bis auf $(3 \mid 1)$, $(3 \mid 2)$ u. s. w. Es ist also $(\alpha \mid \beta) = +1$ oder $= -1$, je nachdem $\alpha < \beta$ oder $\alpha > \beta$ ist.

---

§ 3.

Das Umkehrungsproblem.

Wir sondern von ϑ_α den Faktor c_α, von $\vartheta_{\alpha\beta\gamma}$ den Faktor $c_{\alpha\beta\gamma}$ ab und schreiben $\vartheta_\alpha = c_\alpha \sigma_\alpha$; $\vartheta_{\alpha\beta\gamma} = c_{\alpha\beta\gamma}\, \sigma_{\alpha\beta\gamma}$. Da zwischen 4 Quadraten ungerader Thetafunktionen eine homogene lineare Gleichung besteht, so gilt dasselbe von 4 Quadraten der Funktionen σ_α. Die Gleichung

1. $$A\sigma_\alpha^2 + B\sigma_\beta^2 + C\sigma_\gamma^2 + D\sigma_\varkappa^2 = 0$$

muss auch für die linearen Glieder von σ_α, σ_β, σ_γ, $\sigma_\varkappa$ erfüllt sein. Das lineare Glied von σ_α ist $u' - e_\alpha u$ [siehe § 2, 33]; folglich genügen die Koeffizienten A, B, C, D den Gleichungen

2. $$\begin{cases} Ae_\alpha^2 + Be_\beta^2 + Ce_\gamma^2 + De_\varkappa^2 = 0, \\ Ae_\alpha + Be_\beta + Ce_\gamma + De_\varkappa = 0, \\ A + B + C + D = 0. \end{cases}$$

Schreibt man

3. $$\sigma_\alpha^2 = \varphi^2 (x - e_\alpha)(x' - e_\alpha),$$

wo φ einen allen ungeraden σ-Funktionen gemeinsamen Faktor be-

deutet, so wird die Gleichung 1., wenn man die Bedingungen 2. beachtet, identisch erfüllt. Die Gleichung 3. bestimmt σ_α als Funktion zweier neuer Grössen x und x'; der Zusammenhang dieser Grössen mit den Variabeln u, u' wird noch genauer festgestellt werden. Zunächst soll gezeigt werden, dass auch die geraden σ-Funktionen eine Darstellung in den x, x' zulassen. Die Gleichung

$$A\sigma_\alpha \cdot \sigma_{\alpha\varkappa\lambda} + B\sigma_\beta \cdot \sigma_{\beta\varkappa\lambda} + C\sigma_\gamma \cdot \sigma_{\gamma\varkappa\lambda} = 0$$

muss auch für die linearen Glieder von σ_α, σ_β, σ_γ erfüllt sein; folglich genügen A, B, C den Bedingungen

$$Ae_\alpha + Be_\beta + Ce_\gamma = 0,$$
$$A + B + C = 0.$$

Demnach ist $A = e_\beta - e_\gamma$; $B = e_\gamma - e_\alpha$; $C = e_\alpha - e_\beta$, und es besteht die Gleichung

4. $$(e_\beta - e_\gamma)\sigma_\alpha\sigma_{\alpha\varkappa\lambda} + (e_\gamma - e_\alpha)\sigma_\beta\sigma_{\beta\varkappa\lambda} + (e_\alpha - e_\beta)\sigma_\gamma\sigma_{\gamma\varkappa\lambda} = 0.$$

Nach § 2, 23. hat man

$$(\alpha \mid \beta)\left[c^2_{\alpha\lambda\mu}\vartheta^2_{\alpha\gamma\varkappa} - c^2_{\beta\lambda\mu}\vartheta^2_{\beta\gamma\varkappa}\right] = \sum_{\gamma,\varkappa}(\gamma \mid \varkappa)(\gamma \mid \lambda)(\gamma \mid \mu)c^2_{\gamma\lambda\mu}\vartheta^2_\varkappa.$$

In den σ-Funktionen lautet diese Gleichung

5. $$(\alpha \mid \beta)\left[\sigma^2_{\alpha\gamma\varkappa} - \sigma^2_{\beta\gamma\varkappa}\right] = \sum_{\gamma,\varkappa}(\gamma \mid \varkappa)(\gamma \mid \lambda)(\gamma \mid \mu)\frac{c^2_{\gamma\lambda\mu}c^2_\varkappa}{c^2_{\alpha\lambda\mu}c^2_{\beta\lambda\mu}}\cdot\sigma^2_\varkappa.$$

Bringt man das letzte Glied der Gleichung 4. auf die rechte Seite, quadriert und drückt $\sigma^2_{\gamma\varkappa\lambda}$, $\sigma^2_{\beta\varkappa\lambda}$ gemäss der Gleichung 5. durch $\sigma^2_{\alpha\varkappa\lambda}$ und die Quadrate ungerader σ-Funktionen aus, so erhält man eine Gleichung zwischen $\sigma^2_{\alpha\varkappa\lambda}$, $\sigma_{\alpha\varkappa\lambda}$, $\sigma_{\beta\varkappa\lambda}$ und ungeraden σ-Funktionen. Bringt man das mit $\sigma_{\beta\varkappa\lambda}$ behaftete Glied auf eine Seite, quadriert von neuem und drückt dann wieder $\sigma^2_{\beta\varkappa\lambda}$ nach 5. durch $\sigma^2_{\alpha\varkappa\lambda}$ und die Quadrate ungerader σ-Funktionen aus, so erhält man eine quadratische Gleichung für $\sigma^2_{\alpha\varkappa\lambda}$, welche $\sigma_{\alpha\varkappa\lambda}$ als Funktion ungerader σ-Funktionen auszudrücken erlaubt. Da die Gleichungen 4. und 5. in den σ-Funktionen homogen sind, so erhält man also, wenn man für die ungeraden σ-Funktionen ihre in x, x' angegebenen Werte einsetzt,

$$\sigma_{\alpha\varkappa\lambda} = \varphi f_{\alpha\varkappa\lambda}(x, x'),$$

wo $f_{\alpha\varkappa\lambda}(x, x')$ eine algebraische Funktion von x, x' bedeutet. Es lassen sich daher auch die geraden σ-Funktionen durch die Grössen x, x' ausdrücken. Um die Funktion $f_{\alpha\varkappa\lambda}(x, x')$ zu finden, kann man folgendermassen verfahren. Aus der Gleichung 4. folgt, wenn man $\sigma_\alpha\sigma_\beta\sigma_\gamma\sigma_{\alpha\beta\gamma} = F_{\alpha\beta\gamma}$ setzt,

$$(e_\beta - e_\gamma) F_{\alpha\varkappa\lambda} + (e_\gamma - e_\alpha) F_{\beta\varkappa\lambda} + (e_\alpha - e_\beta) F_{\gamma\varkappa\lambda} = 0.$$

Betrachtet man $F_{\alpha\varkappa\lambda}$ als Funktion von $e_\alpha, e_\beta, e_\gamma, \ldots e_\mu$, so erkennt man, dass die letzte Gleichung identisch erfüllt wird, wenn man annimmt, dass $F_{\alpha\varkappa\lambda}$, abgesehen von Ausdrücken, welche in allen 6 Grössen $e_\alpha, e_\beta, \ldots e_\mu$ symmetrisch sind, eine ganze, rationale, lineare Funktion von e_α sei; denn die Gleichung $(e_\beta - e_\gamma) e_\alpha^n + (e_\gamma - e_\alpha) e_\beta^n + (e_\alpha - e_\beta) e_\gamma^n = 0$ besteht identisch für die Exponenten $n = 0$ und $n = 1$. Ist $F_{\alpha\varkappa\lambda}$ eine ganze, lineare Funktion von e_α, so ist sie auch eine ganze, lineare Funktion von $e_\varkappa$ und e_λ. Denkt man sich $F_{\alpha\beta\gamma}$ als Funktion der Grössen $e_\alpha, e_\beta, \ldots e_\mu$ bereits bestimmt, so muss die Gleichung

6. $$(e_\beta - e_\gamma) \sigma_\alpha^2 F_{\beta\gamma\mu} + (e_\gamma - e_\alpha) \sigma_\beta^2 F_{\alpha\gamma\mu} + (e_\alpha - e_\beta) \sigma_\gamma^2 F_{\alpha\beta\mu} = 0,$$

welche aus der Gleichung 4. hervorgeht, wenn man sie mit $\sigma_\alpha \sigma_\beta \sigma_\gamma \sigma_\mu$ multipliziert und $\sigma_{\alpha\varkappa\lambda} = \sigma_{\beta\gamma\mu}$, $\sigma_{\beta\varkappa\lambda} = \sigma_{\alpha\gamma\mu}$, $\sigma_{\gamma\varkappa\lambda} = \sigma_{\alpha\beta\mu}$ setzt, durch Einsetzung der Werte für $F_{\beta\gamma\mu}$, $F_{\alpha\gamma\mu}$, $F_{\alpha\beta\mu}$ identisch erfüllt werden, da sie nur eine andere Schreibweise der Gleichung 4. ist. Die Gleichung 6. muss also richtig bleiben, wenn man $e_\alpha, e_\beta, e_\gamma, e_\mu$ durch 4 ganz willkürliche Grössen ersetzt. Setzt man x für e_β, x' für e_γ, so geht aus 6. hervor, da σ_β^2, σ_γ^2 gleich 0 werden, dass $F_{\beta\gamma\mu}$ auch gleich 0 wird. $F_{\beta\gamma\mu}$ wird also 0, wenn zwei der 3 Grössen e_β, e_γ, e_μ gleich x und x' gesetzt werden. Schreibt man

$$F_{\alpha\beta\gamma} = \varphi^4 \psi(e_\alpha, e_\beta, e_\gamma),$$

so ist also

$$\psi(\xi, \eta, x') = A(x - \xi)(x - \eta),$$
$$\psi(\xi, \eta, x) = A'(x' - \xi)(x' - \eta).$$

Hieraus ergibt sich

$$\psi(\xi, \eta, \zeta) = \frac{A(x - \xi)(x - \eta)(x - \zeta) - A'(x' - \xi)(x' - \eta)(x' - \zeta)}{x - x'},$$

folglich ist

7. $$\psi(e_\alpha, e_\beta, e_\gamma) = \frac{A(x - e_\alpha)(x - e_\beta)(x - e_\gamma) - A'(x' - e_\alpha)(x' - e_\beta)(x' - e_\gamma)}{x - x'}.$$

Da diese Gleichung richtig sein muss, wenn man eine beliebige Vertauschung der Indices vornimmt, und da die Faktoren von A und A' die höchste zulässige Anzahl von Faktoren, die vorkommen kann, damit die Funktion $\psi(e_\alpha, e_\beta, e_\gamma)$ in $e_\alpha, e_\beta, e_\gamma$ linear und symmetrisch sei, bereits enthalten, so müssen A und A', wenn auch in ihnen die Grössen $e_\alpha, e_\beta, e_\gamma$ vorkommen, in allen 6 Grössen $e_\alpha, e_\beta \ldots e_\mu$ symmetrisch sein. Bei einer beliebigen Vertauschung der Indices ändern also A und A' ihren Wert nicht. Demnach ist

8. $\psi(e_\varkappa, e_\lambda, e_\mu) = \dfrac{A(x-e_\varkappa)(x-e_\lambda)(x-e_\mu) - A'(x'-e_\varkappa)(x'-e_\lambda)(x'-e_\mu)}{x-x'}$.

Nun ist $\varphi^4\psi(e_\alpha, e_\beta, e_\gamma) = \sigma_\alpha\sigma_\beta\sigma_\gamma\sigma_{\alpha\beta\gamma}$, $\varphi^4\psi(e_\varkappa, e_\lambda, e_\mu) = \sigma_\varkappa\sigma_\lambda\sigma_\mu\sigma_{\varkappa\lambda\mu}$. Da $\sigma_{\alpha\beta\gamma} = \sigma_{\varkappa\lambda\mu}$ ist, so erhält man durch Vergleichung der Ausdrücke 7. und 8.

$$\frac{A(x-e_\alpha)(x-e_\beta)(x-e_\gamma)}{\sigma_\alpha\sigma_\beta\sigma_\gamma} = -\frac{A'(x'-e_\varkappa)(x'-e_\lambda)(x'-e_\mu)}{\sigma_\varkappa\sigma_\lambda\sigma_\mu}.$$

Dividiert man durch $\sigma_\alpha\sigma_\beta\sigma_\gamma$, setzt für σ_α^2, σ_β^2, σ_γ^2 ihre Werte aus 2. ein und schreibt

$$R(x) = (x-e_\alpha)(x-e_\beta)(x-e_\gamma)(x-e_\varkappa)(x-e_\lambda)(x-e_\mu),$$

so folgt

$$\frac{A}{R(x')} = -\frac{A'\varphi^6}{\sigma_\alpha\sigma_\beta\sigma_\gamma\sigma_\varkappa\sigma_\lambda\sigma_\mu}.$$

Bestimmt man das Vorzeichen der ungeraden σ-Funktionen in der Weise, dass

$$\sigma_\alpha\sigma_\beta\sigma_\gamma\sigma_\varkappa\sigma_\lambda\sigma_\mu = -\varphi^6\sqrt{R(x)}\;\sqrt{R(x')}$$

wird, so erhält man

$$A\sqrt{R(x)} = A'\sqrt{R(x')}.$$

Dann ergibt sich aus 7., wenn man

$$X_{\alpha\beta\gamma} = (x-e_\alpha)(x-e_\beta)(x-e_\gamma)$$

setzt, die Gleichung

$$\sigma_{\alpha\beta\gamma} = B\varphi.\frac{\sqrt{X_{\alpha\beta\gamma}.X'_{\varkappa\lambda\mu}} - \sqrt{X'_{\alpha\beta\gamma}.X_{\varkappa\lambda\mu}}}{x-x'}.$$

Um B zu bestimmen, setzen wir die Werte von σ_α, $\sigma_{\alpha\beta\gamma}$ in der Gleichung 13. des § 2 ein. Diese Gleichung lautet

$$\sigma_{\alpha\gamma\varkappa}\sigma_{\alpha\gamma\lambda} - \sigma_{\beta\gamma\varkappa}\sigma_{\beta\gamma\lambda} = (\alpha\,|\,\beta)(\gamma\,|\,\mu).\frac{c_\varkappa . c_\lambda . c_{\gamma\varkappa\mu} . c_{\gamma\lambda\mu}}{c_{\alpha\varkappa\mu} . c_{\alpha\lambda\mu} . c_{\beta\varkappa\mu} . c_{\beta\lambda\mu}} . \sigma_\varkappa\sigma_\lambda.$$

Durch eine leichte Rechnung findet man

$$B^2 e_{\alpha\beta}\, e_{\gamma\mu} = \frac{c_\varkappa c_\lambda c_{\gamma\varkappa\mu} c_{\gamma\lambda\mu}}{c_{\alpha\varkappa\mu} c_{\alpha\lambda\mu} c_{\beta\varkappa\mu} c_{\beta\lambda\mu}}.$$

Beachtet man die Gleichung

$$R c_\alpha c_\beta e_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta\gamma}\, c_{\alpha\beta\varkappa}\, c_{\alpha\beta\lambda}\, c_{\alpha\beta\mu},$$

so erhält man aus der letzten Gleichung

$$B^2 q = R^2 p.$$

Da $R^2\dfrac{p}{q} = 1$ gesetzt worden war, so ist also $B = \pm 1$. Nimmt man $B = +1$, so ist damit auch das Vorzeichen der Wurzel $\sqrt{R(x)}$ be-

stimmt. Die Funktionen σ_α, $\sigma_{\alpha\beta\gamma}$ lassen sich also in folgender Form darstellen

$$9. \qquad \sigma_\alpha = \varphi\sqrt{(x-e_\alpha)(x'-e_\alpha)},$$

$$10. \qquad \sigma_{\alpha\beta\gamma} = \varphi\,\frac{\sqrt{X_{\alpha\beta\gamma}X'_{\varkappa\lambda\mu}}-\sqrt{X'_{\alpha\beta\gamma}X_{\varkappa\lambda\mu}}}{x-x'}.$$

Es bleibt noch übrig festzustellen, in welcher Weise die Differentiale du, du', dx, dx' voneinander abhängen. Nach 27. § 2 lässt sich $\sigma_\varkappa\frac{\partial\sigma_\lambda}{\partial u}-\sigma_\lambda\frac{\partial\sigma_\varkappa}{\partial u}$ linear durch die Produkte $\sigma_\alpha\sigma_{\alpha\varkappa\lambda}$, $\sigma_\beta\sigma_{\beta\varkappa\lambda}$ ausdrücken. Folglich ist

$$\sigma_\varkappa d\sigma_\lambda-\sigma_\lambda d\sigma_\varkappa = C_\alpha\sigma_\alpha\sigma_{\alpha\varkappa\lambda}+C_\beta\sigma_\beta\sigma_{\beta\varkappa\lambda},$$

wo C_α, C_β lineare Funktionen von du, du' sind. Man bestimmt sie leicht, indem man für $\sigma_\varkappa$, σ_λ, σ_α, σ_β nur ihre linearen Glieder schreibt. Dann erhält man

$$\begin{aligned}(u'-e_\varkappa u)(du'-e_\lambda du)-(u'-e_\lambda u)(du'-e_\varkappa du)\\ = C_\alpha(u'-e_\alpha u)+C_\beta(u'-e_\beta u)\end{aligned}$$

und hieraus folgt

$$11. \qquad \left\{\begin{aligned}C_\alpha+C_\beta &= (e_\varkappa-e_\lambda)du,\\ C_\alpha e_\alpha+C_\beta e_\beta &= (e_\varkappa-e_\lambda)du'.\end{aligned}\right.$$

Nun ist nach 10., wenn man $y=\sqrt{R(x)}$ und $x-e_\alpha=x_\alpha$ schreibt,

$$\sigma_\alpha\sigma_{\alpha\varkappa\lambda} = \frac{\sigma_\alpha^2\sigma_\varkappa\sigma_\lambda}{\varphi^2(x-x')}\left[\frac{y}{x_\alpha x_\varkappa x_\lambda}-\frac{y'}{x'_\alpha x'_\varkappa x'_\lambda}\right],$$

folglich, wenn man

$$f = C_\alpha\sigma_\alpha\sigma_{\alpha\varkappa\lambda}+C_\beta\sigma_\beta\sigma_{\beta\varkappa\lambda}$$

setzt,

$$\begin{aligned}f = \frac{\sigma_\varkappa\sigma_\lambda}{x-x'}\Bigg[&\frac{y}{x_\varkappa x_\lambda}((x'-e_\alpha)C_\alpha+(x'-e_\beta)C_\beta)\\ &-\frac{y'}{x'_\varkappa x'_\lambda}((x-e_\alpha)C_\alpha+(x-e_\beta)C_\beta)\Bigg]\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}f = \frac{\sigma_\varkappa\sigma_\lambda}{x-x'}\Bigg[&\frac{y}{x_\varkappa x_\lambda}(x'(C_\alpha+C_\beta)-C_\alpha e_\alpha-C_\beta e_\beta)\\ &-\frac{y'}{x'_\varkappa x'_\lambda}(x(C_\alpha+C_\beta)-C_\alpha e_\alpha-C_\beta e_\beta)\Bigg].\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen 11. geht diese Gleichung über in

$$12. \qquad f = \frac{\sigma_\varkappa\sigma_\lambda(e_\varkappa-e_\lambda)}{x-x'}\left[\frac{y}{x_\varkappa x_\lambda}(x'du-du')-\frac{y'}{x'_\varkappa x'_\lambda}(x\,du-du')\right].$$

Nun ist $\sigma_\varkappa d\sigma_\lambda - \sigma_\lambda d\sigma_\varkappa = \sigma_\varkappa \sigma_\lambda d \log \frac{\sigma_\lambda}{\sigma_\varkappa}$, mithin nach 9.

$$f = \tfrac{1}{2}\sigma_\varkappa\sigma_\lambda \left[\frac{dx}{x-e_\lambda} + \frac{dx'}{x'-e_\lambda} - \frac{dx}{x-e_\varkappa} - \frac{dx'}{x'-e_\varkappa}\right]$$

13. $$f = -\tfrac{1}{2}(e_\varkappa - e_\lambda)\sigma_\varkappa\sigma_\lambda \left[\frac{dx}{x_\varkappa x_\lambda} + \frac{dx'}{x'_\varkappa x'_\lambda}\right].$$

Aus den Gleichungen 12. und 13. folgt, da sie für beliebige Indices richtig sein müssen,

14. $$-\tfrac{1}{2}\frac{dx}{y} = \frac{x'du - du'}{x-x'}; \quad \tfrac{1}{2}\frac{dx'}{y'} = \frac{xdu - du'}{x-x'},$$

und hieraus ergibt sich

15. $$\begin{cases} du = \dfrac{dx}{2y} + \dfrac{dx'}{2y'}, \\ du' = \dfrac{xdx}{2y} + \dfrac{x'dx'}{2y'}. \end{cases}$$

Der Faktor φ, mit dem in den Gleichungen 9. und 10. der Ausdruck der σ-Funktionen behaftet ist, lässt sich durch ein Doppelintegral bestimmen. Damit ist dann auch für die σ-Funktion selbst eine Darstellung in der Form eines Doppelintegrals gewonnen.

Für die σ-Funktion hingeschrieben, lauten die Gleichungen 38. des § 2

16. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \log \sigma_a}{\partial u^2} = \dfrac{c^{20}_{a\beta\gamma}}{c_{a\beta\gamma}} - e_a^2 \dfrac{\sigma^2_{a\beta\gamma}}{\sigma^2_a} + k_a \cdot \dfrac{e_\gamma \sigma^2_\beta - e_\beta \sigma^2_\gamma}{\sigma^2_a}, \\ \dfrac{\partial^2 \log \sigma_a}{\partial u \partial u'} = \dfrac{c^{11}_{a\beta\gamma}}{c_{a\beta\gamma}} + e_a \dfrac{\sigma^2_{a\beta\gamma}}{\sigma^2_a} - k_a \cdot \dfrac{e_\gamma \sigma^2_\beta - e_\beta \sigma^2_\gamma}{\sigma^2_a}, \\ \dfrac{\partial^2 \log \sigma_a}{\partial u'^2} = \dfrac{c^{02}_{a\beta\gamma}}{c_{a\beta\gamma}} - \dfrac{\sigma^2_{a\beta\gamma}}{\sigma^2_a} + k_a \cdot \dfrac{\sigma^2_\beta - \sigma^2_\gamma}{\sigma^2_a}. \end{cases}$$

Die Konstante k_a hat folgenden Wert

$$k_a = -(\beta \mid \gamma)(a \mid \varkappa)(a \mid \lambda)(a \mid \mu) \cdot \frac{c^2_\beta \cdot c^2_\gamma}{c^2_a \cdot c^2_{a\beta\gamma}}.$$

Setzt man

17. $$\frac{\partial \log \sigma_a}{\partial u} + e_a \cdot \frac{\partial \log \sigma_a}{\partial u'} = F_a,$$

so erkennt man aus den Gleichungen 16., dass sich $\frac{\partial F_a}{\partial u}, \frac{\partial F_a}{\partial u'}$ rational durch x und x' ausdrücken lässt, da sich die mit einer Irrationalität behaftete Grösse $\frac{\sigma^2_{a\beta\gamma}}{\sigma^2_a}$ forthebt. Nun ist

$$\frac{\partial F_a}{\partial x} = \frac{\partial F_a}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F_a}{\partial u'}\cdot\frac{\partial u'}{\partial x},$$

folglich, da nach 15. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2y};\ \frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{x}{2y}$ ist,

18. $$2y\frac{\partial F_a}{\partial x} = \frac{\partial F_a}{\partial u} + x\cdot\frac{\partial F_a}{\partial u'}.$$

Aus dieser Gleichung sieht man, dass auch $y\frac{\partial F_a}{\partial x}$ sich rational durch x und x' ausdrücken lässt. Dasselbe gilt von $y'\cdot\frac{\partial F_a}{\partial x'}$. Schreibt man

19. $$2y\frac{\partial F_a}{\partial x} = G_a;\ 2y'\frac{\partial F_a}{\partial x'} = G'_a,$$

so erhält man durch Differentiation

$$y'\frac{\partial G_a}{\partial x'} = 2yy'\frac{\partial^2 F_a}{\partial x\,\partial x'} = y\frac{\partial G'_a}{\partial x}.$$

Da G_a und G'_a als rationale Funktionen von x, x' die Grössen y, y' gar nicht enthalten, so folgt aus der letzten Gleichung

$$\frac{\partial G_a}{\partial x'} = o;\ \frac{\partial G'_a}{\partial x} = o.$$

G_a ist also eine Funktion von x allein, G'_a von x' allein; und zwar ist G_a eine gebrochene Funktion mit dem Nenner $x - e_a$; der Zähler ist in x vom 2. Grade. Schreibt man $G_a = \frac{g_a(x)}{x - e_a}$, so folgt aus 19.

20. $$F_a = \int\frac{g_a(x)}{x - e_a}\cdot\frac{dx}{2y} + \int\frac{g_a(x')}{x' - e_a}\cdot\frac{dx'}{2y'}.$$

Nun ist nach 9.

$$\frac{\partial \log\sigma_a}{\partial u} = \frac{\partial \log\varphi}{\partial u} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x - e_a}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x' - e_a}\cdot\frac{\partial x'}{\partial u}$$

und nach 14.

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{2x'y}{x - x'};\ \frac{\partial x'}{\partial u} = \frac{2xy'}{x - x'}.$$

Bildet man in entsprechender Weise die Werte von $\frac{\partial \log\sigma_a}{\partial u'}, \frac{\partial x}{\partial u'}, \frac{\partial x'}{\partial u'}$ und setzt sie in 17. ein, so erhält man, wenn man 20. beachtet und

$$w_a(x) = \int\frac{g_a(x)}{x - e_a}\cdot\frac{dx}{2y}$$

schreibt,

$$\frac{\partial \log \varphi}{\partial u} + e_\alpha \frac{\partial \log \varphi}{\partial u'} = w_\alpha(x) + w_\alpha(x') + \frac{1}{x-x'}\left[y\frac{x'-e_\alpha}{x-e_\alpha} - y'\frac{x-e_\alpha}{x'-e_\alpha}\right]$$

oder, wenn man

$$z = \frac{y-y'}{x-x'}$$

setzt,

$$21. \quad \frac{\partial \log \varphi}{\partial u} + e_\alpha \frac{\partial \log \varphi}{\partial u'} = z + w_\alpha(x) + w_\alpha(x') - \frac{y}{x-e_\alpha} - \frac{y'}{x'-e_\alpha}.$$

Schreibt man

$$\bar{w}_\alpha(x) = \int \frac{g_\alpha(x)}{x-e_\alpha} \cdot \frac{dx}{2y} - \frac{y}{x-e_\alpha} = \int \frac{\bar{g}_\alpha(x)}{x-e_\alpha} \cdot \frac{dx}{2y},$$

so bedeutet $\bar{g}_\alpha(x)$ eine ganze Funktion 5. Grades von x. Diese Funktion muss durch $x-e_\alpha$ teilbar sein. Wäre nämlich $\bar{g}_\alpha(x)$ nicht durch $x-e_\alpha$ teilbar, so würde $\bar{w}_\alpha(x)$ und folglich auch $\frac{\partial \log \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \log \varphi}{\partial u'}$ für $x = e_\alpha$ unendlich gross. Da φ in den Indices symmetrisch ist, so müsste $\frac{\partial \log \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \log \varphi}{\partial u'}$ auch für $x = e_\beta, e_\gamma, \ldots e_\mu$ unendlich werden. Dies ist aber nicht der Fall; denn die rechte Seite der Gleichung 21. besitzt für $x = e_\beta, e_\gamma, \ldots, e_\mu$ einen endlichen Wert. Folglich muss $\bar{g}_\alpha(x)$ durch $x-e_\alpha$ teilbar sein. Stellt man die Gleichung

$$\frac{\partial \log \varphi}{\partial u} + e_\alpha \frac{\partial \log \varphi}{\partial u'} = z + \bar{w}_\alpha(x) + \bar{w}_\alpha(x')$$

noch einmal für einen anderen Index auf,

$$\frac{\partial \log \varphi}{\partial u} + e_\beta \frac{\partial \log \varphi}{\partial u'} = z + \bar{w}_\beta(x) + \bar{w}_\beta(x'),$$

und löst diese Gleichungen nach $\frac{\partial \log \varphi}{\partial u}$ und $\frac{\partial \log \varphi}{\partial u'}$ auf, so erhält man

$$22. \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \log \varphi}{\partial u} = z + W(x) + W(x'), \\[2ex] \dfrac{\partial \log \varphi}{\partial u'} = W'(x) + W'(x'), \end{cases}$$

wo

$$23. \quad W(x) = \int L(x) \cdot \frac{dx}{2y}; \quad W'(x) = \int M(x) \cdot \frac{dx}{2y}$$

und L und M ganze Funktionen von x bedeuten, deren Grad den vierten nicht überschreitet. Ferner ist

$$\frac{\partial \log \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \log \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \log \varphi}{\partial u'} \cdot \frac{\partial u'}{\partial x},$$

folglich, da nach 15. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2y}$; $\frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{x}{2y}$ ist, wenn man

24. $$V = W(x) + W(x'); \quad V' = W'(x) + W'(x')$$

schreibt,

$$2y \frac{\partial \log \varphi}{\partial x} = z + V + x V'.$$

Differenziert man diese Gleichung nach x', so erhält man nach 24. und 23.

25. $$4yy' \frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial x \partial x'} = 2y' \frac{\partial z}{\partial x'} + L(x') + x M(x').$$

Bezeichnet man die ganze Funktion

$$\frac{R(x) - R(x')}{x - x'}$$

mit $Q(x, x')$, so überzeugt man sich leicht, dass die Gleichung

26. $$2y' \frac{\partial z}{\partial x'} = \frac{\partial Q}{\partial x'} - z^2$$

besteht. Da man in 25. x mit x' vertauschen kann, so folgt also

27. $$\frac{\partial Q}{\partial x'} + L(x') + x M(x') = \frac{\partial Q}{\partial x} + L(x) + x' M(x).$$

Diese Gleichung muss eine Identität sein. Mit ihrer Hülfe lassen sich die Koeffizienten von L und M bis auf 3 bestimmen. Setzt man in 27. für L und M ganze Funktionen 4. Grades mit unbestimmten Koeffizienten ein und schreibt

$$R(x) = x^6 - h_1 x^5 + h_2 x^4 - h_3 x^3 + h_4 x^2 - h_5 x + h_6,$$

so erhält man durch Gleichsetzung der Koeffizienten gleicher Potenzen von x und x'

28. $$\begin{cases} L(x) = -4x^4 + 3h_1 x^3 - 2h_2 x^2 + (b + h_3) x + a, \\ M(x) = -2x^3 + h_1 x^2 + cx + b. \end{cases}$$

Sondert man von L und M die Glieder mit den unbestimmten Koeffizienten ab und setzt

$$\begin{aligned} \overline{L}(x) &= -4x^4 + 3h_1 x^3 - 2h_2 x^2 + h_3 x, \\ \overline{M}(x) &= -2x^3 + h_1 x^2, \\ \overline{W}(x) &= \int \overline{L}(x) \frac{dx}{2y}; \quad \overline{W}'(x) = \int \overline{M}(x) \frac{dx}{2y}, \\ \overline{V} &= \overline{W}(x) + \overline{W}(x'); \quad \overline{V}' = \overline{W}'(x) + \overline{W}'(x'), \end{aligned}$$

so ergibt sich aus 22. und 28., wenn man 15. beachtet,

$$\varphi = e^{\frac{1}{2}(au^2 + 2buu' + cu'^2)} \cdot \overline{\varphi},$$

wo

$$d \log \overline{\varphi} = z\, du + \overline{V} du + \overline{V}' du'$$

ist. Der Ausdruck für $d \log \varphi$ enthält ausser den Grössen x, x' nur die Konstanten e_α. Den Exponentialfaktor $e^{\frac{1}{2}(au^2 + 2buu' + cu'^2)}$ könnte man sich, ähnlich wie es bei den elliptischen σ-Funktionen der Fall ist, von allen 16 σ-Funktionen abgesondert denken.

Setzt man die Werte von $L(x)$ und $M(x)$ aus 28. in 25. ein, so erhält man

29.
$$4yy' \frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial x \partial x'} = a + b(x + x') + cxx' +$$
$$+ \frac{1}{(x - x')^2}[2yy' - 2x^3x'^3 + x^2x'^2h_1(x + x') - 2h_2x^2x'^2$$
$$+ h_3xx'(x + x') - 2h_4xx' + h_5(x + x') - 2h_6].$$

Mit Hülfe dieser Gleichung gelangt man zu einer Bestimmung der Grössen a, b, c. Es ist

$$\frac{\partial^2 \log \sigma_\alpha}{\partial x \partial x'} = \frac{\partial^2 \log \sigma_\alpha}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial^2 \log \sigma_\alpha}{\partial u'^2} \cdot \frac{\partial u'}{\partial x} \cdot \frac{\partial u'}{\partial x'}$$
$$+ \frac{\partial^2 \log \sigma_\alpha}{\partial u \partial u'} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial x'} \cdot \frac{\partial u'}{\partial x} \right].$$

Substituiert man für $\frac{\partial^2 \log \sigma_\alpha}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 \log \sigma_\alpha}{\partial u \partial u'}$, $\frac{\partial^2 \log \sigma_\alpha}{\partial u'^2}$ ihre in 16. angegebenen Werte und bedenkt, dass $\frac{\partial^2 \log \sigma_\alpha}{\partial x \partial x'} = \frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial x \partial x'}$ ist, so ergibt sich, da sich die Quadrate der ungeraden σ-Funktionen fortheben,

30.
$$4yy' \frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial x \partial x'} = \frac{\overset{20}{c}_{\alpha\beta\gamma} + \overset{11}{c}_{\alpha\beta\gamma}(x + x') + \overset{02}{c}_{\alpha\beta\gamma}xx'}{c_{\alpha\beta\gamma}} - \frac{\sigma^2_{\alpha\beta\gamma}}{\varphi^2}.$$

Setzt man für $\sigma_{\alpha\beta\gamma}$ seinen Wert ein und vergleicht in 29. und 30. die Koeffizienten geeigneter Potenzen von x, x', so findet man unmittelbar

$$a = \frac{\overset{20}{c}_{\alpha\beta\gamma}}{c_{\alpha\beta\gamma}} - (e_\alpha + e_\beta + e_\gamma)e_\varkappa e_\lambda e_\mu - (e_\varkappa + e_\lambda + e_\mu)e_\alpha e_\beta e_\gamma,$$
$$b = \frac{\overset{11}{c}_{\alpha\beta\gamma}}{c_{\alpha\beta\gamma}} + e_\alpha e_\beta e_\gamma + e_\varkappa e_\lambda e_\mu,$$
$$c = \frac{\overset{02}{c}_{\alpha\beta\gamma}}{c_{\alpha\beta\gamma}} - (e_\alpha e_\beta + e^\beta e_\gamma + e_\gamma e_\alpha + e_\varkappa e_\lambda + e_\lambda e_\mu + e_\mu e_\varkappa).$$

Durch Hinzufügung eines Exponentialfaktors zu den σ-Funktionen kann man bewirken, dass a, b, c den Wert 0 annehmen.

Lebenslauf.

Am 13. Juli 1877 wurde ich, Friedrich Gerhard Konrad Nölke, in Bremen als Sohn evangelischer Eltern geboren. Ich besuchte die Volksschule und das Volksschullehrerseminar meiner Vaterstadt. Nachdem ich kurze Zeit als Volksschullehrer tätig gewesen war, bereitete ich mich auf die Reifeprüfung an der Handelsschule (Realgymnasium) zu Bremen vor. Im Herbst 1898 erhielt ich das Zeugnis der Reife und studierte dann in Marburg und Berlin Mathematik, Physik und Geographie. In Marburg hörte ich Vorlesungen bei den Herren Professoren Schottky, Hess, Melde, Richarz, Feussner, Fischer, Cohen, Natorp, in Berlin bei den Herren Professoren Frobenius und Paulsen. Allen diesen Herren, besonders aber Herrn Prof. Schottky, der mich bei der Ausarbeitung der Dissertation durch viele Ratschläge unterstützte, bin ich zu grossem Danke verpflichtet.

